

Mémoire de Master : Groupoïdes de déformation et calcul pseudo-différentiel inhomogène

Clément Cren

Résumé

Les groupoïdes sont des objets mathématiques issus de la théorie des catégories, ce sont des (petites) catégories dans lesquelles toutes les flèches sont inversibles. Cette définition plutôt abstraite peut être enrichie en donnant une structure supplémentaire (topologique, différentiable) aux ensembles d'objets et de morphismes. Cette voie a été explorée par Ehresmann et son école depuis les années 1950. Les groupoïdes lisses (aussi appelés groupoïdes de Lie) présentent des similarités avec les groupes de Lie (qu'ils généralisent) grâce à leurs algébroides, bien que la théorie soit ici plus compliquée (notamment au niveau du troisième théorème de Lie dont l'analogue présente ici des problèmes d'intégrabilité), ces notions sont explorées dans les deux premières parties.

Dans [8] Connes utilise un groupoïde pour donner une preuve simple du théorème de l'indice d'Atiyah et Singer [2], précédemment dans [9, 10] le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage est construit et sert de base à un théorème de l'indice longitudinal et la K-théorie d'un feuilletage. Dès lors les groupoïdes gagnent un intérêt en géométrie non commutative en servant à désingulariser des espaces géométriques singuliers (variétés à bord, à singularité coniques, espace des feuilles d'un feuilletage...). Ces idées de désingularisation par les groupoïdes sont présentées dans les troisième et quatrième parties.

Enfin on présente dans la cinquième partie un exemple avec le groupoïde associé aux variétés filtrées (ou de Carnot) et leur calcul pseudo-différentiel inhomogène. Celui-ci a été développé par Folland et Stein reliant des problèmes de calcul pseudo-différentiel sur les variétés de contact et sur les groupes de Heisenberg, il s'applique plus largement quand on se donne une filtration du fibré tangent. Suivant des idées de Debord et Skandalis introduites dans [17], ce calcul pseudo-différentiel peut se retrouver à l'aide d'un groupoïde de déformation. Celui-ci a été construit indépendamment par Van Erp-Yunken [37] et Choi-Ponge [6, 5, 7]; on en présente une approche plus naturelle proposée dans [30] par Mohsen.

Table des matières

1	Groupeïdes de Lie	3
1.1	Définition	3
1.2	Exemples	5
1.2.1	Exemples de base	5
1.2.2	Exemples de nature topologique	5
1.2.3	Groupeïdes associés à un feuilletage	6
1.3	Constructions algébriques	9
1.3.1	Morphismes, sous-groupeïdes	9
1.3.2	Actions	10
1.3.3	Quotient et locale trivialité	11
2	Algébroïde de Lie	15
2.1	Définition	15
2.2	Exemples	16
2.3	Représentations d'algébroïdes de Lie	18
2.4	Algébroïde d'un groupeïde de Lie	18
2.4.1	Le foncteur Lie des groupeïdes	18
2.4.2	Algébroïde de certains groupeïdes	21
2.5	De l'algébroïde au groupeïde	21
2.5.1	Bisections	21
2.5.2	Application exponentielle	23
2.5.3	Application au groupeïde des repères	25
2.6	Survol de la théorie de Lie des groupeïdes	26
3	Aspects analytiques des groupeïdes de Lie	27
3.1	C^* -algèbre d'un groupeïde	27
3.1.1	Système de Haar ou demies-densités	27
3.1.2	Représentations unitaires et C^* -algèbre	29
3.1.3	Équivalence de Morita	34
3.2	Calcul pseudo-différentiel sur un groupeïde	37
3.2.1	Distributions conormales	37
3.2.2	Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété	40
3.2.3	Opérateurs pseudo-différentiels sur un groupeïde	41
4	Groupeïdes de déformation	43
4.1	Fibré normal	43
4.2	Déformation au cône normal	45
4.3	Éclatement	47
4.4	Itération des déformations au cône normal	49
5	Variétés de Heisenberg, de Carnot, calcul pseudo-différentiel inhomogène	50
5.1	Variété de Carnot, filtration et fibré en groupes de Lie nilpotents	51
5.2	Cas d'un seul sous-fibré et déformations au cône normal avec poids	52
5.3	Le groupeïde du calcul inhomogène	57

1 Groupoïdes de Lie

Les groupoïdes permettent d'encoder de nombreuses constructions géométriques. On présente ici une théorie élémentaire de ces objets avec de nombreux exemples de différentes natures, de leur version lisse et de leurs algébroïdes avec un rapide survol de la théorie de Lie.

1.1 Définition

Définition 1.1. Un groupoïde est une petite catégorie dont toutes les flèches sont des isomorphismes

Cette définition, bien que concise (si on connaît un peu de théorie des catégories) n'est pas très pratique pour nos objectifs, on en donne une autre qui lui est équivalente.

Définition 1.2. Un groupoïde est la donnée de deux ensembles $G, G^{(0)}$ respectivement le groupoïde et la base avec des applications

- source et but (range), surjectives, $s, r: G \rightarrow G^{(0)}$
- unité, injective, $u: G^{(0)} \hookrightarrow G$, on identifie ainsi $G^{(0)}$ comme un sous-ensemble de G
- inverse, involutive, $i: G \rightarrow G$ telle que $s \circ i = r$
- produit $p: G^{(2)} \rightarrow G$ où $G^{(2)} = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in G^2, s(\gamma_1) = r(\gamma_2)\}$ est l'ensemble des paires d'éléments composables

Ces applications vérifient de plus les propriétés suivantes :

- $\forall (\gamma_1, \gamma_2) \in G^{(2)}, s(\gamma_1 \gamma_2) = s(\gamma_2)$
- $\forall (\gamma_1, \gamma_2) \in G^{(2)}, r(\gamma_1 \gamma_2) = r(\gamma_1)$
- $\forall (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in G^{(3)}, (\gamma_1 \gamma_2) \gamma_3 = \gamma_1 (\gamma_2 \gamma_3)$
- $\forall \gamma \in G, r(\gamma) \gamma = \gamma s(\gamma), \gamma \gamma^{-1} = r(\gamma)$

Où on utilise les notations $\gamma_1 \gamma_2 = p(\gamma_1, \gamma_2), \gamma^{-1} = i(\gamma)$.

On note $G \rightrightarrows G^{(0)}$ ou parfois seulement G .

On déduit directement des axiomes :

Proposition 1.3. u est inverse à droite de r et s

Pour passer de la première définition à la deuxième, il faut prendre $G^{(0)}$ comme l'ensemble des objets, G l'ensemble des morphismes, la multiplication est la composition, l'unité est l'identité de chaque objet...

Définition 1.4. Pour $x, y \in G^{(0)}$ on note

- $G_x = s^{-1}(x)$ la s-fibre
- $G^x = r^{-1}(x)$ la r-fibre
- $G_x^y = G_x \cap G^y$

De même pour des sous-ensembles $U, V \subset G^{(0)}, G_U, G^V, G_U^V$.

NB. G_x^x hérite alors d'une structure de groupe naturelle, tous les éléments étant alors composables.

De manière plus générale on a

Exemple 1. un groupe peut être vu comme un groupoïde avec un seul élément comme objet, tous les éléments sont composables et la composition et l'inverse sont données par la loi du groupe

On peut, via la deuxième définition, ajouter des structures supplémentaires aux groupoïdes.

Définition 1.5. Un groupoïde topologique est un groupoïde $G \rightrightarrows G^{(0)}$ tel que :

- G et $G^{(0)}$ sont des espaces topologiques, $G^{(0)}$ est séparé
- s, r, p, u sont continus, i est un homéomorphisme

Il est dit localement compact si de plus :

- l'espace topologique G est à base dénombrable, localement séparé, localement compact
- s est ouverte

Dans le second cas r est aussi ouverte et les fibres sont séparées.

Définition 1.6. Si G est un groupoïde topologique, il est dit s -connexe si $\forall x \in G^{(0)}, G_x$ est connexe.

NB. Dans le cas non connexe on peut vouloir privilégier la composante s -connexe contenant $G^{(0)}$, cela n'est vraiment pertinent dans le cas lisse où on peut assurer le fait qu'elle soit ouverte (cf ci-dessous).

Définition 1.7. Un groupoïde de Lie (ou groupoïde lisse) est un groupoïde $G \rightrightarrows G^{(0)}$ tel que :

- G et $G^{(0)}$ sont des variétés lisses
- r, s sont des submersions surjectives lisses
- i est un difféomorphisme
- u est un plongement lisse
- p est lisse

Il est dit étale si r, s sont étales (i.e. des difféomorphismes locaux)

NB. On allège parfois les hypothèses en ne demandant pas forcément à ce que G soit séparé, seulement localement séparé et $G^{(0)}$ séparé. (ce sera par exemple le cas du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage)

$G^{(2)}$ s'identifie au produit fibré $G \times_{s \times r} G$, ces applications étant des submersions, il est lisse et on peut parler de la régularité de la multiplication.

Si G est un groupoïde de Lie, les s -fibres et r -fibres sont des sous-variétés plongées de G , si on prend de plus $x, y \in G^{(0)}$ tels que $G_x^y \neq \emptyset$, $G_x \simeq G_y$ et $G^x \simeq G^y$, les multiplications à gauche et droite par des éléments de G étant des difféomorphismes.

1.2 Exemples

On se donne dans cette section des exemples qui nous resserviront dans la suite pour illustrer les différentes notions liées aux groupoïdes.

1.2.1 Exemples de base

Exemple 2. *Un ensemble est naturellement muni d'une structure de groupoïde sur lui-même en prenant toutes les applications de structures comme l'identité.*

Exemple 3. *Nous l'avons déjà mentionné, un groupe est un groupoïde sur son élément neutre.*

Exemple 4. *Soit M un ensemble, G un groupe. Le groupoïde trivial est $M \times G \times M \rightrightarrows M$ avec les applications*

- $u(x) = (x, 1, x)$
- $s(x, g, y) = y$
- $r(x, g, y) = x$
- $(x, g, y)(y, h, z) = (x, gh, z)$
- $(x, g, y)^{-1} = (y, g^{-1}, x)$

Il est appelé le groupoïde trivial sur M de groupe G dans [26]. En prenant $G = 1$ on obtient le groupoïde des paires $M \times M \rightrightarrows M$ (en fait on peut partir du groupoïde des paires et faire le produit avec le groupe G vu comme groupoïde). La structure (topologique, Lie) du groupoïde s'obtient directement de celles de M et G .

Exemple 5. *Soit M un ensemble, R une relation d'équivalence sur M , l'ensemble G_R des couples d'éléments équivalents est un groupoïde sur M .*

Exemple 6 (Le groupoïde d'une action de groupe). *Si $G \curvearrowright X$, on construit le groupoïde de l'action $G \times X \rightrightarrows X$ par les applications :*

- $u(x) = (e, x)$
- $s(g, x) = x$
- $r(g, x) = g \cdot x$
- $(g, h \cdot x)(h, x) = (gh, x)$
- $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, g \cdot x)$

On le note $G \ltimes X$

1.2.2 Exemples de nature topologique

Exemple 7 (Le groupoïde fondamental). *Soit X un espace topologique, on note $\Pi X \rightrightarrows X$ le groupoïde fondamental ou groupoïde d'homotopie, c'est l'ensemble des classes d'homotopies de chemins entre la source et le but, l'unité est donné par le chemin trivial de base la source, l'inverse est le chemin suivi en sens inverse et le produit est la composition des chemins. Si X est de plus une variété, ΠX hérite d'une structure de groupoïde de Lie.*

Exemple 8 (Le groupoïde des repères). *Soit $\pi: E \rightarrow M$ un fibré vectoriel, on note $\Phi(E) = \{\xi: E_x \xrightarrow{\sim} E_y, x, y \in M\} \rightrightarrows M$ le groupoïde des repères. La source est l'élément de M paramétrant la fibre de départ, le but celui d'arrivée, le produit est la composition, l'inverse l'inverse du morphisme. L'unité est donnée par l'identité de la fibre. La structure lisse de $\Phi(E)$ s'obtient en trivialisant le fibré.*

Exemple 9 (Le groupoïde de gauge). Soit $\pi: P \rightarrow M$ un G -fibré principal. $G \curvearrowright P \times P$ à droite par multiplication. Le groupoïde de gauge du fibré est donné par $P \times P / G \rightrightarrows M$ (c'est une variété car l'action est libre et propre). On note $\langle u, v \rangle$ les classes d'équivalence.

- $s(\langle u, v \rangle) = \pi(v)$
- $r(\langle u, v \rangle) = \pi(u)$
- $u(x) = \langle v, v \rangle$ où $v \in \pi^{-1}(x)$ est un élément quelconque (ne dépend pas du choix car l'action sur la fibre est transitive)
- $\langle u_1, v_1 \rangle$ et $\langle u_2, v_2 \rangle$ sont composables ssi $\pi(v_1) = \pi(u_2)$, quitte à faire agir G on peut alors supposer $\langle u_2, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ et alors $\langle u_1, v_1 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, v_2 \rangle$
- $\langle u, v \rangle^{-1} = \langle v, u \rangle$

NB. On a ici vu que les fibrés principaux s'exprimaient en terme de groupoïdes, on attire l'attention sur le fait que cela regroupe des situations extrêmement variées en géométrie : structures riemanniennes, complexes, spinorielles, revêtements...

En effet, si $E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel, $\Phi(E)$ s'identifie au groupoïde de gauge du fibré des repères $GL(E) \rightarrow M$ qui est un $GL_{\text{rg}(E)}(\mathbb{R})$ -fibré principal

Si M est une variété, ΠM s'identifie au groupoïde de gauge du revêtement universel de M qui est un $\pi_1(M)$ -fibré principal

Exemple 10 (Fibrés en groupes de Lie). Soit $\pi: K \rightarrow M$ une submersion telle que $\forall m \in M, \pi^{-1}(m)$ est un groupe de Lie. On munit K d'une structure de groupoïdes avec $s = r = \pi$, la multiplication et l'inverse sont données par les lois de groupes et l'unité par le neutre de la fibre. Ce cas ressemble aux fibrés principaux mais ici on a une identification canonique de la fibre à un groupe et donc on peut se donner une unité via une section du fibré. Réciproquement, un groupoïde de Lie tel que $r = s$ est de cette forme car G_x^x possède naturellement une structure de groupe pour tout groupoïde.

\triangleleft Cette notion renvoie souvent aux fibrés en groupes de Lie **localement triviaux**, nous n'avons pas besoin ici de cette hypothèse et nous reviendrons dessus plus tard lorsque l'on évoquera les groupoïdes localement triviaux.

NB. Cet exemple comprend, en prenant \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n comme groupe de Lie, le cas des fibrés vectoriels.

1.2.3 Groupoïdes associés à un feuilletage

On s'intéresse ici à ce qui a été à l'origine de ce mémoire de Master à savoir l'étude des feuilletages. Dans son article [9], Connes définit la C^* -algèbre d'un feuilletage et plus largement celle d'un groupoïde est définie par Renault dans [35]. Cette notion sera abordée ultérieurement, regardons pour l'instant ce qui motivait Connes, à savoir les feuilletages et leurs groupoïdes de monodromie et d'holonomie.

Définition 1.8. Un feuilletage sur une variété M^m de dimension n est la donnée d'un atlas lisse maximal \mathcal{F} tel que

- si $(U, \phi) \in \mathcal{F}$, $\phi(U) = U_1 \times U_2$ où U_1, U_2 sont des ouverts respectifs de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m-n}$.
- si $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$, $U \cap V \neq \emptyset$ alors $\psi \circ \phi^{-1}$ préserve les feuilles i.e.
 $\exists h_1, h_2 / \forall x, y, \psi \circ \phi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$.

Définition 1.9. Avec les mêmes notations, les ensembles $\phi^{-1}(U_1 \times \{c\}), c \in U_2$ sont appelés les plaques de \mathcal{F} . Un chemin de plaques est la donnée de plaques $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ plaques de \mathcal{F} telles que $\forall i, \alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$. Être sur un même chemin de plaques est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées les feuilles du feuilletage \mathcal{F} .

Proposition 1.10. De manière équivalente, un feuilletage est donné par une distribution intégrable de dimension n sur M .

Démonstration. Les feuilles sont des sous-variétés de M et on prend leur espace tangent comme distribution. Elle est naturellement intégrable. Réciproquement si on se donne une distribution intégrable on peut trouver des coordonnées locales x^1, \dots, x^m de M dans laquelle la distribution s'écrit $\text{Vect} \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$ et on obtient un feuilletage. \square

NB. Le théorème de Frobenius sert à vérifier la condition d'intégrabilité d'une distribution en la remplaçant par la condition d'être involutive (i.e. stable par crochet de Lie)

Exemple 11. *Un champ de vecteurs non nul en tout point donne un feuilletage de dimension 1.*

Exemple 12. *Soit $\alpha \in \Omega^1(M)$ une 1-forme, $\ker(\alpha)$ donne un feuilletage de codimension 1 ssi $\alpha \wedge d\alpha = 0$*

Pour représenter le feuilletage sous la forme d'un groupoïde, on pourrait prendre le groupoïde de la relation d'équivalence "être sur la même feuille" mais celui-ci n'est en général pas différentiable. On introduit donc les groupoïdes de monodromie et d'holonomie.

Définition 1.11. Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée, son groupoïde de monodromie est $Mon(M, \mathcal{F}) \rightrightarrows M$ dont les éléments sont les $(x, [\gamma], y)$ où $x, y \in M$ sont sur une même feuille L et $[\gamma]$ est une classe d'homotopie de chemins dans L de x à y (i.e. on prend les chemins tangents aux feuilles). Les applications de structure sont les mêmes que pour le groupoïde fondamental.

$Mon(M, \mathcal{F})$ est un groupoïde de Lie pas forcément séparé.

NB. On a une notion plus générale de groupoïde de monodromie associé à un groupoïde s -connexe G , c'est celui des classes d'homotopies de chemins à extrémité fixées dont la source est constante et dont le point de départ est une unité du groupoïde (ainsi un groupoïde et son groupoïde de monodromie ont même espace d'unités). Dans le cas des feuilletage on a un groupoïde naturel associé à la relation d'équivalence d'être sur la même feuille, celles-ci étant connexes on a un groupoïde de monodromie associé, c'est $Mon(M, \mathcal{F})$.

Il existe une notion plus centrale dans la théorie des feuilletages que la monodromie et c'est celle d'holonomie.

Définition 1.12. Une holonomie est une application lisse h entre deux transversales locales du feuilletage telle que l'image d'un point est sur la même feuille que le point de départ.

NB. On rappelle que si (M, \mathcal{F}) est feuilletée, une sous-variété transverse au feuilletage est une sous-variété $T \subset M$ telle que $\forall x \in T, T_x T + \mathcal{F}_x = T_x M$. Localement on peut toujours construire des sous-variétés transverses.

Partant d'un chemin tangent à une feuille, on va construire une holonomie entre un voisinage de son point de départ et de son point d'arrivée. Cela va dépendre de plusieurs choix et c'est donc plus précisément un germe d'holonomie que nous allons construire.

On se donne $(\Omega_i, \phi_i)_i$ un atlas feuilleté, $\phi_i: \Omega_i \rightarrow U_i \times T_i$ où U_i est l'ensemble des feuilles et T_i celui de transversales. On écrit $\phi_i = (w_i, \tau_i)$ et les changements de carte sous la forme de $(u, v) \mapsto (g_{ij}(u, t), h_{ij}(t))$ entre Ω_i et Ω_j . On pose $W_{ijh} = U_i \times U_j \times T'_h$ où $h: T'_h \subset T_j \rightarrow T_h \subset T_i$ est une holonomie entre deux ouverts. Ces ensembles vont nous servir à définir le groupoïde d'holonomie

$$s: W_{ijh} \rightarrow M$$

$$(u, v, t) \mapsto \phi_j^{-1}(v, t)$$

$$r: W_{ijh} \rightarrow M$$

$$(u, v, t) \mapsto \phi_i^{-1}(v, h(t))$$

$(u_1, v_1, t_1) \in W_{ijh}$ et $(u_2, v_2, t_2) \in W_{jkh}$ sont composables ssi $v_1 = u_2$ et $t_1 = h'(t_2)$ et alors leur produit est $(u_1, v_1, t_1)(u_2, v_2, t_2) = (u_1, v_2, t_2) \in W_{ikhoh'}$.

On prend deux holonomies $(i_1, j_1, h_1), (i_2, j_2, h_2)$, soit $(x, y) \in (r, s)(W_{i_1 j_1 h_1}) \cap (r, s)(W_{i_2 j_2 h_2})$ on pose $(u, t) = j_2(y)$. h_1 et h_2 définissent le même germe d'holonomie en y si $h \circ h_{j_1 j_2}$ et $h_{i_1 i_2} \circ h_2$ coïncident au voisinage de t , cela définit une relation d'équivalence \sim sur $\cup_{i,j,h} W_{ijh}$.

Définition 1.13. $\widetilde{Hol}(M, \mathcal{F}) := \cup_{i,j,h} W_{ijh} / \sim$ est le groupoïde contenant toutes les holonomies du feuilletage. Le groupoïde d'holonomie $Hol(M, \mathcal{F})$ en est sa composante s -connexe.

Proposition 1.14. $\widetilde{Hol}(M, \mathcal{F}) \rightrightarrows M$ est un groupoïde de Lie (non nécessairement séparé)

Démonstration. L'unité est donnée par la classe de (x, x, id) . Pour ce qui est de la structure lisse, définir le même germe d'holonomie est une condition ouverte et les changements de carte entre les W_{ijh} sont induits par les ϕ_{ij} donc sont lisses. \square

On conclue cette section en regardant le lien entre ces deux notions en regardant le germe d'holonomie induit par un chemin.

On prend $x, y \in M$ deux points sur une même feuille et γ un chemin entre ces deux points, tangent à la feuille. On recouvre $[0; 1]$ par des intervalles I_1, \dots, I_n tel que $\gamma(I_j) \subset \Omega_{i_j}$, $0 \in I_1, 1 \in I_n$. On a ainsi une holonomie $h_{i_n i_{n-1}} \circ \dots \circ h_{i_2 i_1} : T'_1 \rightarrow T'_n$ où $T'_1 \subset T_1$ est un ouvert contenant x , idem pour T'_n . Cette holonomie ne dépend que des ouverts traversés et le germe serait donc le même pour un chemin suffisamment proche, elle est ainsi localement constante et donc si deux chemins sont homotopes on leur associe le même germe d'holonomie.

Proposition 1.15. *L'holonomie d'un chemin induit un morphisme de groupoïdes $Mon(M, \mathcal{F}) \rightarrow \widetilde{Hol}(M, \mathcal{F})$, son image est $Hol(M, \mathcal{F})$.*

NB. On peut définir le groupoïde d'holonomie de (M, \mathcal{F}) comme le groupoïde dont les flèches entre deux points x, y d'une même feuille sont les holonomies associées aux classes d'homotopie de chemins de x à y comme on vient de les décrire. On obtient alors une autre définition de $Hol(M, \mathcal{F}) \subset \widetilde{Hol}(M, \mathcal{F})$ on peut montrer qu'il s'agit bien de la composante s -connexe et que nos deux définitions coïncident donc. On a pris ce détour pour expliciter la structure lisse du groupoïde d'holonomie.

1.3 Constructions algébriques

Comme pour chaque structure algébrique, on passe en revue les différentes constructions basiques qu'elles permettent.

1.3.1 Morphismes, sous-groupoïdes

Définition 1.16. Soient G et H deux groupoïdes. Un morphisme de groupoïdes est une application $f: G \rightarrow H$ telle que

- $r_H \circ f = f \circ r_G$
- $\forall g \in G, f(g)^{-1} = f(g^{-1})$
- $\forall (g_1, g_2) \in G^{(2)}, f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$

i.e. en termes de catégories, un morphisme de groupoïdes est un foncteur. On dit que f est un morphisme sur $f^{(0)}$. On parle d'isomorphisme si cette application est bijectives.

En effet si f est un morphisme de groupoïdes bijectif alors il réalise une bijection entre $G^{(0)}$ et $H^{(0)}$ et l'image réciproque de deux éléments composables est encore composable.

NB. Si on a des structures supplémentaires on demande de plus à ce que f soit continue, lisse, un homéomorphisme, difféomorphisme.

Exemple 13 (ancres). Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde, l'ancrage est le morphisme $(r, s): G \rightarrow M \times M$ entre G et le groupoïde des paires.

Exemple 14 (tiré en arrière d'un groupoïde). Soit G un groupoïde localement compact, $\varphi: X \rightarrow G^{(0)}$ une submersion surjective (on peut se contenter de conditions plus faibles mais le fait, par exemple que $\varphi \times \varphi$ soit transverse à l'ancrage ne suffit pas), on construit le groupoïde tiré en arrière ${}^*\varphi^*(G) \rightrightarrows X$ en posant ${}^*\varphi^*(G) = \{(x, \gamma, y) \in X \times G \times X / \varphi(x) = s(\gamma), \varphi(y) = r(\gamma)\}$ et avec les applications de structure :

- $s(x, \gamma, y) = y$
- $r(x, \gamma, y) = x$
- $(x, \gamma_1, y)(y, \gamma_2, z) = (x, \gamma_1 \gamma_2, z)$
- $u(x) = (x, \varphi(x), x)$
- $(x, \gamma, y)^{-1} = (y, \gamma^{-1}, x)$

C'est un groupoïde de Lie. L'application $(x, \gamma, y) \rightarrow \gamma$ est alors un morphisme de groupoïdes ${}^*\varphi^*(G) \rightarrow G$ sur φ .

Exemple 15. Un morphisme de groupoïdes entre deux fibrés en groupes de Lie est une application entre les bases et entre chaque fibre correspondantes, un morphisme de groupes.

Exemple 16. Si $F: (P_1 \rightrightarrows M_1) \rightarrow (P_2 \rightrightarrows M_2)$ est un morphisme de fibrés principaux alors $\langle u_2, u_1 \rangle \mapsto \langle F(u_2), F(u_1) \rangle$ est un morphisme entre les groupoïdes de gauge

Exemple 17. Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée, l'holonomie d'un chemin donne un morphisme de groupoïdes (surjectif) $\text{Mon}(M, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hol}(M, \mathcal{F})$

On déduit directement des axiomes :

Proposition 1.17. Si $f: G \rightarrow H$ est un morphisme sur $f^{(0)}$ on a :

- $s_H \circ f = f^{(0)} \circ s_G$
- $f \circ u_G = u_H \circ f^{(0)}$

On peut ainsi comprendre $f^{(0)}$ comme la restriction de f à l'espace des unités.

Définition 1.18. Un sous-groupoïde de G est une sous-catégorie, i.e. c'est la donnée d'un groupoïde H et d'un morphisme injectif $H \rightarrow G$.

Dans le cadre au moins topologique il est dit plongé si l'inclusion est un plongement, il est dit large (wide) si les espaces d'unités sont les mêmes.

Exemple 18. Si R est une relation d'équivalence sur un ensemble X , le groupoïde de la relation d'équivalence est un sous-groupoïde du groupoïde des paires $X \times X$.

Exemple 19. Si G est un groupoïde de Lie, $U \subset G^{(0)}$ est un ouvert alors G_U^U est un sous-groupoïde de Lie.

Exemple 20. Si G est un groupe de Lie $H \subset G$ un sous-groupe fermé

$$\begin{aligned} G \times G/H &\rightarrow G/H \times G \times G/H \\ \langle g_2, g_1 \rangle &\rightarrow (g_2H, g_2g_1^{-1}, g_1H) \end{aligned}$$

est un morphisme de entre le groupoïde de gauge de $G \rightarrow G/H$ et le groupoïde trivial sur G/H de groupe G . Cette application fait du premier un sous-groupoïde du deuxième. De plus le premier s'identifie aussi au groupoïde de l'action $G \ltimes G/H$.

On a une notion naturelle de produit et de somme.

Définition 1.19. Soient G_1, G_2 deux groupoïdes. On peut considérer leur somme en prenant leur union disjointe $G_1 \sqcup G_2$ et leur produit $G_1 \times G_2$ en prenant le produit cartésien. Ce sont deux groupoïdes et G_1, G_2 s'identifient naturellement comme des sous-groupoïdes de ceux-ci. Ces groupoïdes héritent des structures supplémentaires de G_1 et G_2 .

1.3.2 Actions

Définition 1.20. Si G est un groupoïde, l'orbite en $x \in G^{(0)}$ est $Or_x = r(G_x) = s(G^x)$. L'espace des orbites est $Or(G) = G^{(0)}/G$, le groupe d'isotropie de x est G_x^x

On a une notion plus générale d'action de groupoïde

Définition 1.21. Soit G un groupoïde, on se donne un ensemble M et une application $f: M \rightarrow G^{(0)}$. On construit le produit fibré $G \times_{G^{(0)}} M$ via l'application source. Une action de G sur M par f est alors une application

$$\begin{aligned} G \times_{G^{(0)}} M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto g \cdot m \end{aligned}$$

telle que

- $f(g \cdot m) = r(g)$
- $h \cdot (g \cdot m) = (hg) \cdot m$
- $u(f(m)) \cdot m = m$

L'orbite de l'action est alors $G \cdot m = \{g \cdot m, g \in G_{f(m)}\} = r(G_{f(m)})$. On dit parfois que M est un G -espace à gauche (et on a la même notion de G -espace à droite en fibrant par le but).

NB. Avec plus de structure il faut demander à ce que les applications soient continues, lisses. Dans le cas lisse, s étant une submersion, le produit fibré est aussi une variété.

On retrouve la première définition avec l'identité sur $G^{(0)}$

Exemple 21. En prenant un ensemble M quelconque, on a une action triviale sur $G^{(0)} \times M$ via $g(s(g), m) = (r(g), m)$.

Exemple 22. Si G est un groupe, une action de groupe est une action de groupoïde et réciproquement.

Exemple 23. Les orbites de $Hol(M, \mathcal{F})$ sont les feuilles et si L est une feuille, $Hol(M, \mathcal{F}) \twoheadrightarrow L$ est le revêtement correspondant au noyau de $\pi_1(L, x) \rightarrow Hol(L, x)$

Si on a une action de G sur M on peut munir le produit fibré $G \times_{G^{(0)}} M$ d'une structure de groupoïde sur M via les applications suivantes

- $s(g, m) = m$
- $r(g, m) = g \cdot m$
- $u(m) = (f(m), m)$
- $(h, gm)(g, m) = (hg, m)$
- $(g, m)^{-1} = (g^{-1}, g \cdot m)$

On note encore $G \times M$ ce groupoïde (ou $G \times_f M$ si on veut préciser l'action). Il a la même régularité que l'action.

On peut ainsi voir qu'une action de G sur M par f est équivalent à se donner un groupoïde Υ sur M et une bijection entre $G \times_{G^{(0)}} M$ et Υ qui est l'identité sur M , l'action est alors donnée par la structure de groupoïde induite sur $G \times_{G^{(0)}} M$.

Exemple 24. On a une action naturelle $G_s \times G$, elle donne une structure de groupoïde à $G^{(2)} \rightrightarrows G$ avec

- $G^{(2)}(2) = \{(x, y), (z, t) \in (G^{(2)})^2 / z = xy\}$
- $s(x, y) = (x, s(y))$
- $r(x, y) = (xy, r(y))$
- $(x, y)(xy, z) = (x, yz)$
- $(x, y)^{-1} = (xy, y^{-1})$

Comme dans le cas des groupes, on veut pouvoir avoir des actions linéaires, des représentations. Il faut cette fois prendre en compte que la base n'est pas forcément ponctuelle et donc agir plus largement sur des fibrés vectoriels.

Définition 1.22. Une représentation d'un groupoïde G sur un fibré vectoriel $E \rightarrow G^{(0)}$ est une action $G \times E \rightarrow E$ telle que $\forall \gamma \in G, \gamma: E_{s(\gamma)} \rightarrow E_{r(\gamma)}$ est un isomorphisme linéaire.

Proposition 1.23. Dans le cas localement trivial, une représentation sur le fibré vectoriel $E \rightarrow G^{(0)}$ est équivalente à un morphisme de groupoïdes $G \rightarrow \Phi(E)$.

Démonstration. Un morphisme $G \rightarrow \Phi(E)$ induit une représentation via la représentation naturelle $\Phi(E) \times E$. Réciproquement, si on se donne une représentation $G \curvearrowright E$, on a un morphisme naturel $G \rightarrow \Phi(E)$ entre groupoïdes ensemblistes mais il faut montrer qu'il lisse. Pour cela, on trivialise le fibré via $\psi: U \times V \xrightarrow{\sim} E_U, U \subset G^{(0)}$ ouvert et V espace vectoriel, l'action s'écrit alors localement comme $G_U^U \times (U \times V) \rightarrow U \times V$ et est lisse par hypothèse, ainsi le morphisme associé $G_U^U \rightarrow U \times \text{GL}(V) \cong \Phi(E)_U^U$ est lisse. Et on recouvre le groupoïde par ces ouverts car il est localement trivial. \square

1.3.3 Quotient et locale trivialité

En lien avec les actions de groupoïdes, on introduit les quotients de groupoïdes. Ils se définissent de manière analogue aux groupes mais présentent des problèmes de régularité qui vont nous faire introduire la notion de trivialité locale.

Définition 1.24. Le sous-groupoïde intérieur d'un groupoïde G est $\mathcal{J}G = \{g \in G / s(g) = r(g)\}$

Définition 1.25. Si G est un groupoïde, un sous-groupoïde normal est un sous-groupoïde large $N \subset \mathcal{J}G$ tel que

$$\forall \nu \in N, \forall g \in G / s(g) = s(\nu), g\nu g^{-1} \in N$$

Exemple 25. Un sous-groupoïde normal d'un groupe vu comme groupoïde à un seul objet est un sous-groupe normal et réciproquement (ici $\mathcal{J}G = G$).

Définition 1.26. Soit $F: G \rightarrow G'$ un morphisme de groupoïdes, son noyau est l'ensemble

$$F^{-1}(G'^{(0)}) = \{g \in G / F(g) \in u'(G'^{(0)})\}$$

Proposition 1.27. Si $F: G \rightarrow G'$ est injective sur les objets alors son noyau est un sous-groupoïde normal.

Démonstration. Soit $g \in \ker(F)$ on

$$\begin{aligned} F(s(g)) &= s(F(g)) \\ &= r(F(g)) \\ &= F(r(g)) \end{aligned}$$

donc $s(g) = r(g)$ par injectivité et $\ker(F) \subset \mathcal{J}G$.

Si maintenant $\gamma \in G$ vérifie $s(\gamma) = s(g)$, on a $F(\gamma g \gamma^{-1}) = F(\gamma)F(g)F(\gamma)^{-1}$ or $F(g) \in G'^{(0)}$ donc est égale à sa source et $s(F(g)) = F(s(g)) = F(s(\gamma)) = s(F(\gamma))$ et $F(\gamma g \gamma^{-1}) = s(F(\gamma)) \in G'^{(0)}$ et donc $\gamma g \gamma^{-1} \in \ker(F)$. \square

On se borne ici aux morphismes préservant la base où l'injectivité est donc claire. Comme dans le cas des groupes, tous les sous-groupoïdes normaux peuvent se ramener à ça.

Proposition 1.28. Soit $N \subset G$ un sous-groupoïde normal. On définit la relation d'équivalence sur G , $g \sim h \Leftrightarrow \exists \nu \in N, h\nu = g$ et $G/N := G/\sim$. C'est un groupoïde (sur $G^{(0)}$) par passage au quotient des applications structurelles de G et la surjection canonique $G \rightarrow G/N$ est un morphisme de groupoïdes de noyau N .

Démonstration. On prouve que les applications de structure passent au quotient. $r(h\nu) = r(h)$ donc r est constante sur les classes d'équivalence et passe au quotient. $s(h\nu) = s(\nu) = r(\nu) = s(h)$ donc s passe au quotient. Si $u(x) \sim u(y)$ alors soit $\nu \in N$ $\nu u(x) = u(y)$ donc par la source $s(\nu u(x)) = s(u(x)) = x = y$ et donc la composée de u et de la projection canonique reste injective. Si $h\nu = g$, $g^{-1} = \nu^{-1}h^{-1} = h^{-1}h\nu^{-1}h^{-1}$ donc $g^{-1} \sim h^{-1}$ car N est normal et l'inverse passe au quotient. Si $g = h\nu, g' = h'\nu', gg' = h\nu h'\nu' = hh'h'^{-1}\nu h'\nu'$ et donc comme N est stable par conjugaison et produit, $gg' \sim hh'$ et le produit passe au quotient. Les relations entre les applications sont préservées par passage au quotient et ainsi G/N est un groupoïde sur $G^{(0)}$. Le noyau de la surjection canonique étant évidemment N . \square

Exemple 26. $G/G^{(0)} \cong G$, $G/\mathcal{J}G \cong \text{im}((r, s)) \subset G^{(0)} \times G^{(0)}$.

\triangleleft On a traité ici de l'aspect purement algébrique des quotients, sans se préoccuper de questions topologiques. Le problème est que dans le cas lisse, $\mathcal{J}G$ n'est pas forcément lisse et G/N non plus. Le bon cadre pour pouvoir quotienter dans le cas lisse est celui des groupoïdes localement triviaux (au sens de [26]).

Définition 1.29. Un groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$ est localement trivial (au sens de [26]) si l'ancre $(r, s): G \rightarrow M \times M$ est une submersion surjective, en particulier il est transitif (l'ancre est surjective).

Exemple 27. Un fibré en groupes de Lie ne donne jamais de groupoïde localement trivial (sauf si la base est elle-même triviale) car il ne sera pas transitif (l'image de l'ancre est la diagonale, on dit qu'ils sont totalement intransitifs). On fera donc attention si jamais le FIBRÉ est localement trivial, cela ne veut pas dire que le GROUPOÏDE l'est.

NB. Si on voit un groupoïde comme un graphe (les sommets sont les points et les flèches sont les arêtes), la condition d'être transitive signifie alors que le graphe est connexe et totalement intransitif signifie que tous les sommets sont isolés.

Remarque 1.1. Les groupoïdes de déformation auxquels nous nous intéresseront dans la deuxième partie ne sont pas transitifs, c'est déjà le cas des groupoïdes associés à un feuilletage. Nous nous servons de cette notion ici car elle facilite la théorie de Lie dont nous ferons un survol.

Proposition 1.30. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie. On a l'équivalence*

- i) $G \rightrightarrows M$ est localement trivial.*
- ii) $r_m: G_m \rightarrow M$ est une submersion surjective pour un et donc pour tout $m \in M$*
- iii) L'application de division $\delta_m: G_m \times G_m \rightarrow G$ définie par $\delta_m(g, h) = gh^{-1}$ est une submersion surjective pour un et donc pour tout $m \in M$*

Démonstration. On prouve par exemple $i) \Leftrightarrow ii)$, les arguments sont assez usuels en géométrie différentielle.

Supposons $G \rightrightarrows M$ localement trivial. $(r, s)(G_m) = M \times \{m\}$ car l'ancre est surjective. $M \times \{m\}$ est une sous-variété fermée plongée et l'ancre est une submersion donc r_m est une submersion surjective. Réciproquement si r_m est une submersion surjective, comme $(r, s) \circ \delta_m = r_m \times r_m$, l'ancre est aussi une submersion surjective et donc G est localement trivial. \square

Corollaire 1.31. *Le groupoïde de gauge d'un fibré principal est localement trivial.*

Démonstration. Le but est donné par l'application de projection du fibré qui est une submersion surjective. \square

De nombreux groupoïdes déjà vus s'identifient à des groupoïdes de gauge et sont de ce fait, localement triviaux.

Exemple 28. *On rappelle que si $E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel, $\Phi(E)$ s'identifie au groupoïde de gauge d'un $\text{GL}_{\text{rg}(E)}(\mathbb{R})$ -fibré principal et si M est une variété, ΠM s'identifie au groupoïde de gauge d'un $\pi_1(M)$ -fibré principal, ces deux exemples sont ainsi localement triviaux.*

Exemple 29. *si $G \curvearrowright M$ est une action lisse de groupe de Lie, r_m correspond à l'application $g \rightarrow g \cdot m$ qui est une submersion surjective ssi l'action est transitive. Dans ce cas M s'identifie à un espace homogène G/H où H est le stabilisateur d'un point et $G \times (G/H)$ s'identifie au groupoïde de gauge du H -fibré principal $G \rightarrow G/H$*

On a du mal à trouver un exemple de groupoïde localement trivial qui ne soit pas associé à un fibré principal et pour cause : soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde localement trivial. G_x^x est un groupe de Lie qui agit librement sur G_x , les orbites étant les r_x -fibres. $r_x: G_x \rightarrow M$ est alors un G_x^x -fibré principal. Si on prend un autre point $y \in M$, on a un isomorphisme entre G_x^x et G_y^y donné par la conjugaison par g et alors la multiplication à droite par g^{-1} est un isomorphisme équivariant entre les deux fibrés principaux. On a donc une correspondance (non canonique) entre les groupoïdes localement triviaux et les fibrés principaux.

Justifions à présent cette appellation de "localement trivial". Si $G \rightrightarrows M$ est un groupoïde localement trivial, on fixe $m \in M$, on peut trouver un recouvrement ouvert $(U_i)_i$ de M et des sections $\sigma_i: U_i \rightarrow G_m$ de r_m . Si on pose $H = G_m^m$ le groupe d'isotropie, on a alors des isomorphismes préservant la base

$$\begin{aligned} \Sigma_i: U_i \times H \times U_i &\rightarrow G_{U_i}^{U_i} \\ (y, \gamma, x) &\rightarrow \sigma_i(y)g\sigma_i(x)^{-1} \end{aligned}$$

D'où l'appellation de "localement trivial". Les σ_i sont appelées des sections de décomposition et $\{(U_i, \sigma_i), i\}$ un atlas de sections.

\triangleleft A l'inverse, si on se donne un groupoïde avec de tels isomorphismes locaux, il n'est pas forcément localement trivial car il ne sera pas forcément transitif.

On peut reprendre notre problème initial de quotients. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde localement trivial, $N \subset G$ un sous-groupoïde normal fermé plongé. On se donne un atlas de sections $(U_i, \sigma_i)_i$ et on pose $\psi_i(x, g) = \Sigma_i(x, g, x)$. Puisque N est normal, les ψ se restreignent en $U_i \times N_m \rightarrow N_{U_i}$. On pose alors $\Gamma = \{(\eta, \eta\nu)/\eta \in G, \nu \in N, s(\eta) = r(\nu)\}$, c'est le graphe de la relation d'équivalence induite par N . Par locale trivialité, $\delta': (\eta, \xi) \rightarrow \eta^{-1}\xi$ est une submersion surjective et donc la projection sur le second facteur $\Gamma \rightarrow G$ est une submersion surjective. Ainsi, par critère de Godement, $G/N = G/\Gamma$ est une variété. On vérifie aisément que les applications de structure du quotient ont les propriétés voulues.

Proposition 1.32. *Si $G \rightrightarrows M$ est un groupoïde de Lie localement trivial, $N \subset G$ un sous-groupoïde normal fermé plongé alors $G/N \rightrightarrows M$ est un groupoïde de Lie et l'application de quotient $G \rightarrow G/N$ est une submersion surjective et un morphisme de groupoïdes.*

Corollaire 1.33. *Si $F: G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupoïdes de Lie et une submersion surjective, $G/\ker(F)$ est un groupoïde de Lie et il existe un unique morphisme $\tilde{F}: G/\ker(F) \rightarrow G'$ tel qu'on ait le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{F} & G' \\ \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\ G/\ker(F) & & \end{array}$$

Proposition 1.34. *Si $G \rightrightarrows G^{(0)}$ est localement trivial et si $\varphi: M \rightarrow G^{(0)}$ est une submersion surjective alors ${}^*\varphi^*(G) \rightrightarrows M$ est lui aussi localement trivial.*

Démonstration. Immédiat quand on trivialise. □

2 Algébroïde de Lie

2.1 Définition

On passe à l'objet infinitésimal associé aux groupoïdes de Lie. On commence par le définir abstraitement et on verra après quelques exemples comment associer une algébroïde de Lie à un groupoïde de Lie.

Définition 2.1. Une algébroïde de Lie \mathcal{A} sur une variété M est un fibré vectoriel $\mathcal{A} \rightarrow M$ muni d'un crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{A}}$ sur l'espace $\Gamma(\mathcal{A})$ des sections du fibré ainsi qu'un morphisme de fibrés vectoriels (l'ancre) $p: \mathcal{A} \rightarrow M$ tels que $\forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{A}), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$

- $p([X, Y]_{\mathcal{A}}) = [p(X), p(Y)]$ (Morphisme d'algèbres de Lie)
- $[X, fY]_{\mathcal{A}} = f[X, Y]_{\mathcal{A}} + (p(X) \cdot f)Y$ (Règle de Leibniz)

NB.

- Si une ancre vérifiant la règle de Leibniz existe alors elle est unique.
- On peut en fait déduire le fait que l'ancre soit un morphisme d'algèbres de Lie des autres conditions mais on peut aussi le garder comme axiome

Exemple 30. Une algébroïde de Lie sur un point est une algèbre de Lie (l'ancre est nulle).

Proposition 2.2. Soit $\mathcal{A} \rightarrow M$ une algébroïde de Lie, $U \subset M$ un ouvert, alors $\mathcal{A}|_U \rightarrow U$ est une algébroïde de Lie.

Démonstration. La règle de Leibniz assure que le crochet de Lie de deux sections est local, i.e. le germe de $[X, Y]$ en un point $m \in M$ ne dépend que des germes de X, Y en m . \square

Définition 2.3. Une algébroïde de Lie $\mathcal{A} \rightarrow M$ est dite

- transitive si l'ancre est surjective entre les fibres
- régulière si $\text{rg}(p)$ est localement constante
- totalement intransitive si $p = 0$

NB.

- Si \mathcal{A} est transitive, les inverses à droite de l'ancre induisent des connexions sur \mathcal{A}
- Si \mathcal{A} est régulière, $p(\mathcal{A}) \subset M$ est une distribution involutive donc induit un feuilletage sur M appelé feuilletage caractéristique de \mathcal{A} (et sur chaque feuille, l'algébroïde est transitive).

Définition 2.4. Soient $\mathcal{A} \rightarrow M, \mathcal{A}' \rightarrow M$ deux algébroïdes de Lie d'ancres respectives p, p' . Un morphisme d'algébroïdes est $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ tel que

- φ est un morphisme de fibrés vectoriels
- φ est un morphisme d'algèbres de Lie
- $p' \circ \varphi p$

NB. On a pris ici la même base. Dans le cas de bases différentes il faut se donner une application entre f entre les bases et alors remplacer la condition sur les ancres par $p' \circ \varphi = df \circ p$. La condition de morphisme d'algèbres de Lie est remplacée par une autre plus difficile à exprimer (que juste $\varphi([\cdot, \cdot]) = [\varphi(\cdot), \varphi(\cdot)]$), elle est plus compliquée à exprimer car le crochet de Lie, bien que dépendant uniquement des germes des champs de vecteurs, agit sur les sections du fibré et non sur le fibré lui même et les sections du fibré ne se poussent pas bien en avant.

Si $\mathcal{A} \rightarrow M$ est une algébroïde transitive d'ancre p on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(p) \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{p} TM \longrightarrow 0$$

Définition 2.5. $\ker(p)$ est appelé le fibré adjoint de \mathcal{A}

Remarque 2.1. On peut en fait montrer que le fibré adjoint d'une algébroïde transitive est un fibré en algèbres de Lie localement trivial.

Soit $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un morphisme d'algébroïdes entre algébroïdes de Lie transitives. On note L, L' les fibrés adjoints respectifs. La condition sur les ancres implique que φ induit un morphisme $\varphi^+: L \rightarrow L'$, c'est un morphisme d'algébroïdes de Lie totalement intransitives.

Proposition 2.6. φ est injective (resp. surjective, resp. bijective) ssi φ^+ est injective (resp. surjective, resp. bijective).

Démonstration. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{p} & TM & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow \varphi^+ & & \downarrow \varphi & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \xrightarrow{p'} & TM & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La proposition découle alors directement du lemme des cinq. □

Remarque 2.2. Dans le cas non transitif mais régulier, on remplace TM dans la suite exacte par l'image de l'ancre. Le fibré adjoint n'est alors plus un fibré en algèbres de Lie localement trivial.

2.2 Exemples

Exemple 31 (Algébroïde triviale). On prend M une variété, \mathfrak{g} une algèbre de Lie. On munit $TM \oplus (M \times \mathfrak{g})$ d'une structure d'algébroïde en prenant comme ancre la projection sur le premier facteur, le crochet devient alors

$$[X \oplus V, Y \oplus W] = [X, Y] \oplus (X(W) - Y(V) + [V, W])$$

C'est une algébroïde transitive appelée algébroïde de Lie triviale d'algèbre de structure \mathfrak{g} .

Exemple 32 (Fibré en algèbres de Lie). On a vu qu'une algèbre de Lie était un algébroïde de Lie sur un point. Sur une variété M il faut prendre un fibré en algèbres de Lie (i.e. un fibré vectoriel dont les fibres sont des algèbres de Lie). Puisque c'est un fibré vectoriel il est trivialement trivial en tant que fibré vectoriel mais les changements de carte n'ont pas à préserver la structure d'algèbre de Lie (auquel cas on dira que le fibré en algèbres de Lie est localement trivial). Dans les deux cas c'est une algébroïde de Lie totalement intransitive.

On peut regarder les morphismes entre deux telles algébroïdes.

Un morphisme $\varphi: TM \oplus (M \times \mathfrak{g}) \rightarrow TM \oplus (M \times \mathfrak{g}')$ est nécessairement de la forme

$$\varphi(X \oplus V) = X \oplus (\omega(X) + \varphi^+(V))$$

où ω est une 1-forme à valeur dans \mathfrak{g}' et $\varphi^+: M \times \mathfrak{g} \rightarrow M \times \mathfrak{g}'$ un morphisme de fibré vectoriel.

La condition que φ respecte le crochet de Lie se traduit par trois choses :

- φ^+ respecte aussi le crochet i.e. c'est un morphisme de fibrés en algèbres de Lie
- $d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$ i.e. ω est une forme de Maurer-Cartan
- $X(\varphi^+(W)) - \varphi^+(X(W)) + [\omega(X), \varphi^+(W)] = 0$

Et réciproquement ces trois conditions font de φ un morphisme d'algébroïdes de Lie.

Exemple 33. Une distribution involutive $\mathcal{F} \subset TM$ (ou de manière équivalente un feuilletage régulier) est une algébroïde de Lie où l'ancre est l'inclusion, elle est régulière.

Exemple 34 (Algèbroïde des dérivations). On part de $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Diff}_M^0(E) \longrightarrow \text{Diff}_M^1(E) \xrightarrow{\sigma} \text{Hom}(T^*M, \text{End}(E)) \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \text{End}(E) \end{array}$$

où σ est le symbole principal. On a une application

$$\begin{aligned} TM &\hookrightarrow \text{Hom}(T^*M, \text{End}(E)) \\ X &\rightarrow (\omega \rightarrow \omega(X) \text{Id}_E) \end{aligned}$$

On peut donc tirer en arrière, on a le pullback

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(E) & \xrightarrow{p} & TM \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \text{Diff}_M^1(E) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Hom}(T^*M, \text{End}(E)) \end{array}$$

$\mathcal{D}(E)$ s'identifie ainsi à un sous-fibré des opérateurs d'ordre 1 sur E . Puisque $\ker(p) \cong \text{End}(E)$ on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{End}(E) \longrightarrow \mathcal{D}(E) \longrightarrow TM \longrightarrow 0$$

Ainsi les sections de $\mathcal{D}(E)$ sont des opérateurs différentiels d'ordre 1, $D: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ tel qu'il existe $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X = p(D)$ tel que

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall \mu \in \Gamma(E), D(u\mu) = uD(\mu) + p(D)(u)\mu$$

i.e. D est une dérivation sur E . Le crochet de Lie naturel sur les dérivations est $[D, D'] = DD' - D'D$, on a ainsi muni l'ensemble des dérivations de E , $\mathcal{D}(E)$, d'une structure d'algèbroïde de Lie sur M . Elle est transitive de par sa construction.

Exemple 35 (Algèbroïde d'une action). Si on prend une action d'algèbre de Lie \mathfrak{g} sur une variété M

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ X &\rightarrow X^\dagger \end{aligned}$$

Une section $V \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{g})$ induit alors un champ de vecteur V^\dagger via la formule $V^\dagger(m) = V(m)^\dagger(m)$.

On munit alors $M \times \mathfrak{g} \rightarrow M$ d'une structure d'algèbroïde de Lie pour l'ancre $p(m, X) = X^\dagger(m)$ et le crochet $[V, W] = V^\dagger(W) - W^\dagger(V) + [V, W]_{\mathfrak{g}}$. L'algèbroïde de Lie obtenue est l'algèbroïde de Lie de l'action et on la note $\mathfrak{g} \ltimes M$.

2.3 Représentations d'algébroïdes de Lie

Nous allons donner une notion de représentation d'algébroïdes de Lie. Celle-ci pourra sembler étrange mais s'appuie en fait sur la proposition 1.23 et sur la construction de l'algébroïde d'un groupoïde de Lie que nous détaillerons dans la partie suivante.

Définition 2.7. Une représentation de l'algébroïde $\mathcal{A} \rightarrow M$ sur le fibré vectoriel $E \rightarrow M$ est un morphisme d'algébroïdes $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}(E)$.

Exemple 36. Si $\mathcal{A} \rightarrow M$ est une algébroïde, V un espace vectoriel, on a la représentation triviale $\mathcal{A} \curvearrowright (M \times V)$ via

$$\rho^0(X)(f) = p(X)(f), X \in \Gamma(\mathcal{A}), f \in \mathcal{C}^\infty(M, V)$$

Exemple 37. Si $\mathcal{A} \rightarrow M$ est une algébroïde transitive, on a la représentation adjointe $ad: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}(L)$ où L est le fibré adjoint via la formule $ad(X)(V) = [X, V], X \in \Gamma(\mathcal{A}), V \in \Gamma(L)$.

Exemple 38. Si $E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel, ∇ une connexion plate alors $X \mapsto \nabla_X$ est une représentation $TM \curvearrowright E$

2.4 Algébroïde d'un groupoïde de Lie

2.4.1 Le foncteur Lie des groupoïdes

Comme dans le cas des groupes de Lie qui donnent une algèbre de Lie, on définit ici un foncteur Lie de la catégorie des groupoïdes de Lie vers celle des algébroïdes.

On se donne G un groupoïde de Lie, si $\alpha \in G$, on note $R_\alpha: G_{r(\alpha)} \rightarrow G_{s(\alpha)}$ l'application de multiplication à droite par α .

Définition 2.8. Un champ de vecteurs $Z \in \mathfrak{X}(G)$ est dit invariant à droite si

- Z est s -vertical, i.e. $ds(Z) = 0$, i.e. $\forall \alpha, Z(\alpha)$ est tangent à $G_{s(\alpha)}$
- $\forall (\alpha, \beta) \in G^{(2)}, Z(\alpha\beta) = dR_\beta(Z(\alpha))$

Définition 2.9. L'algébroïde $\mathcal{A}G$ du groupoïde de Lie $G \rightrightarrows G^{(0)}$ est définie par

- $\mathcal{A}G \rightarrow G^{(0)}$ est la restriction de $\ker(ds)$ à $G^{(0)}$ i.e. $\mathcal{A}G = \sqcup_{x \in G^{(0)}} T_x G_x$
- L'ancre $p: \mathcal{A}G \rightarrow TG^{(0)}$ est donnée par la restriction de dr à $\mathcal{A}G$
- Le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]: \Gamma(\mathcal{A}G)^2 \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}G)$ est donné par $[Y_1, Y_2] = [Z_{Y_1}, Z_{Y_2}]_{|G^{(0)}}$ où si Y est une section locale de $\mathcal{A}G$, $Z_Y(\alpha) = dR_\alpha(Y(r(\alpha)))$ est le champ de vecteurs invariant à droite associé.

On a visiblement, en passant du groupoïde à l'algébroïde, perdu cette symétrie que nous avons entre les applications source et but, il n'en est rien et on peut voir l'algébroïde d'une autre manière.

$s: G \rightarrow G^{(0)}$ est une submersion et $u: G^{(0)} \rightarrow G$ en est une section. Si $x \in G^{(0)}$ on a $T_x G = T_x G^{(0)} \oplus T_x G_x$, d'où, via dr_x , l'identification avec le fibré normal, $(N_{G^{(0)}}^G)_x \cong T_x G_x$. Ainsi on a l'isomorphisme $\Gamma(\ker(ds))^G \cong \Gamma(N_{G^{(0)}}^G)$, or si X, Y sont des sections G -invariantes, $[X, Y]$ l'est aussi, on a donc une structure d'algèbre de Lie sur $\Gamma(N_{G^{(0)}}^G)$

Proposition 2.10. $\mathcal{A}G \cong N_{G^{(0)}}^G$ et l'ancre est donnée par $dr - ds$

On observe alors la symétrie. On aurait tout aussi bien pu prendre

$$\ker(dr)_{|G^{(0)}} = \sqcup_{x \in G^{(0)}} T_x G^x$$

des champs de vecteurs invariants à gauche et ds comme ancre.

Proposition 2.11. $\mathcal{A}G = u^*(\ker(dr)) = u^*(\ker(ds))$ et l'ancre est donnée par la composition

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}G & \longrightarrow & \ker(ds) & \xrightarrow{\subset} & TG & \xrightarrow{dr} & TG^{(0)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G^{(0)} & \xrightarrow{u} & G & \xlongequal{\quad} & G & \xrightarrow{r} & G^{(0)} \end{array}$$

Démonstration. $r \circ u = s \circ u = \text{Id}_{G^{(0)}}$ □

On a défini le foncteur Lie pour les groupoïdes sur les espaces, il reste à voir qu'un morphisme entre groupoïdes en induit un entre leurs algébroïdes.

Soit $F: G \rightarrow G'$ un morphisme de groupoïdes sur $f: M \rightarrow M'$, $f \circ s' = s' \circ F$ donc dF se restreint en $\tilde{F}: T^s G \rightarrow T^s G'$ où $T^s G = \ker(ds) \subset TG$, on a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}G & \longrightarrow & T^s G & \xrightarrow{\tilde{F}} & T^s G' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{u} & G & \xrightarrow{F} & G' \end{array}$$

et puisque $F \circ u = u' \circ f$, on obtient un unique morphisme de fibrés vectoriels $F_*: \mathcal{A}G \rightarrow \mathcal{A}G'$ tel qu'on ait le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}G & \xrightarrow{F_*} & \mathcal{A}G' & \longrightarrow & T^s G' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{u'} & G' \end{array}$$

On a donc défini notre morphisme de fibrés vectoriels. Puisque $r' \circ F = f \circ r$ et par définition de l'ancre via dr , on a $p' \circ F_* = dF \circ p$.

Proposition 2.12. F_* est un morphisme d'algébroïdes

Démonstration. Il reste à voir que c'est un morphisme d'algèbres de Lie. On a vu cette propriété de morphisme que dans le cas $f = \text{Id}_M$ et dans ce cas on constate directement

$$F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y] \quad \square$$

NB. Bien qu'on ne l'ait prouvé que dans un cas restreint de morphismes d'algèbres de Lie, le résultat reste vrai en général. Dans la suite, bien que les résultats seront énoncés dans le cadre général, on ne les prouvera que dans celui où la base est la même et tous les morphismes de groupoïdes sont pris sur l'identité de la base.

Proposition 2.13. Si G est un groupoïde de Lie, $(r, s)_* = p$

NB. On a justifié l'appellation d'ancre pour deux objets a priori distincts.

Démonstration. $(r, s): G \rightarrow M \times M$ est un morphisme de groupoïdes. L'algébroïde du groupoïde des paires est TM on a donc le morphisme d'algébroïdes $(r, s)_*: \mathcal{A}G \rightarrow TM$. Et de par la construction du morphisme induit, on obtient $(r, s)_* = dr = p$. □

On présente maintenant un peu de théorie de Lie pour les groupoïdes, on prouve notamment que les groupoïdes de Lie localement triviaux correspondent aux algébroïdes transitives. On commence par un lemme technique.

Lemme 2.14. Soit $F: G \rightarrow G'$ un morphisme de groupoïdes sur M

- F est une submersion ssi $\forall x \in M, F_x: G_x \rightarrow G'_x$ est une submersion ssi $F_*: \mathcal{A}G \rightarrow \mathcal{A}G'$ est une surjection fibre à fibre.
- F est une immersion ssi $\forall x \in M, F_x$ est une immersion ssi F_* est une injection fibre à fibre.
- F est de rang localement constant ssi F_* l'est.

Proposition 2.15. Si G' est s -connexe et F_* est une surjection fibre à fibre alors F est surjective.

Démonstration. Par le lemme on sait que F est une submersion, ainsi $F(G)$ est un s -voisinage de $M \subset G'$ symétrique (i.e. $F(G)^{-1} = F(G)$) le résultat bien connu dans le cas des groupes de Lie s'étend aux groupoïdes de Lie et le groupoïde engendré par $F(G)$ est G' (la preuve est similaire au cas des groupes), $F(G)$ étant un groupoïde on a le résultat. \square

Proposition 2.16. Le foncteur *Lie* est exact, i.e. la suite exacte de groupoïdes

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G' \longrightarrow 1$$

induit la suite exacte d'algébroïdes

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}K \xrightarrow{i_*} \mathcal{A}G \xrightarrow{\pi_*} \mathcal{A}G' \longrightarrow 0$$

Démonstration. Via le lemme, on est ramené à prouver l'exactitude de

$$0 \longrightarrow T_x K_x \xrightarrow{di_x} T_x G_x \xrightarrow{d\pi_x} T_x G'_x \longrightarrow 0$$

Mais la première suite exacte nous donne que π_x est une submersion surjective et $\pi_x^{-1}(M) = K_x$ d'où le résultat. \square

Corollaire 2.17. Si G est localement trivial alors $\mathcal{A}G$ est transitive. Réciproquement si $\mathcal{A}G$ est transitive et si M est connexe alors G est localement trivial.

Démonstration. On sait que $(r, s)_* = p$ donc si $\mathcal{A}G$ est transitive, p est surjective fibre à fibre et comme $M \times M$ est s -connexe (les fibres s'identifient à M) alors (r, s) est une submersion surjective et G est localement trivial. Réciproquement si G est localement trivial, (r, s) est une submersion surjective et donc p est surjective fibre à fibre et $\mathcal{A}G$ est transitive. \square

On peut expliquer la définition de représentations d'algébroïdes. Nous verrons plus tard le résultat suivant

$$\mathcal{A}\Phi(E) \cong \mathcal{D}(E)$$

On peut alors comprendre que, si on se donne une représentation $\rho: G \rightarrow \Phi(E)$ alors on en induit une $\rho_*: \mathcal{A}G \rightarrow \mathcal{D}(E)$.

2.4.2 Algébroïde de certains groupoïdes

Exemple 39 (Groupoïde des paires). On l'a déjà utilisé, $\mathcal{A}(M \times M) = TM$, l'ancre est l'identité.

Exemple 40 (Fibrés en groupes de Lie). Soit $\pi: K \rightarrow M$ un fibré en groupes de Lie. On lui associe un fibré en algèbres de Lie K_* de la manière suivante : $K_* = u^*(T^\pi K)$. On a $(K_*)_x = \text{Lie}(K_x)$ et donc K_* est un fibré en algèbres de Lie. La construction étant la même que celle de l'algébroïde d'un groupoïde, on obtient $\mathcal{A}K = K_*$. En particulier si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , $\mathcal{A}(G \rightrightarrows \{e\}) = \mathfrak{g}$

Exemple 41. Si on prend un groupoïde trivial (au sens de Mackenzie [26])

$M \times G \times M \rightrightarrows M$, le foncteur Lie étant exact, on peut réutiliser nos deux exemples précédents pour obtenir $\mathcal{A}(M \times G \times M) = TM \oplus (M \times \mathfrak{g})$ et $p(X \oplus V) = X$. Le fibré adjoint s'identifie donc à l'algébroïde $M \times \mathfrak{g}$.

Exemple 42 (Groupoïde d'une action). Soit $m: G \times M \rightarrow M$ une action lisse. On a le groupoïde de l'action $G \times M$ qui s'identifie à un sous-groupoïde de $M \times G \times M$ via $(g, x) \mapsto (gx, g, x)$. Un champ de vecteurs vertical s'identifie à une fonction $\vartheta: G \times M \rightarrow TG$, il est invariant à droite ssi $\vartheta(gh, m) = dR_h \vartheta(g, hm)$. Si on prend une fonction $V: M \rightarrow \mathfrak{g}$ elle induit le champ de vecteurs invariant à droite $\vec{V}(g, x) = dR_g(V(gx))$. En reprenant le morphisme vers $M \times G \times M$ on obtient que l'ancre de $\mathcal{A}(G \times M)$ est $p: M \times G \rightarrow TM$ avec $p(x, X) = X^\dagger(x)$ où $X \mapsto X^\dagger$ est l'action $\mathfrak{g} \curvearrowright M$ induite via celle de G par dérivation. On en déduit ainsi

$$\mathcal{A}(G \times M) = \mathfrak{g} \times M$$

Exemple 43 (Holonomie et monodromie). On part de (M, \mathcal{F}) variété feuilletée. On rappelle que l'application $\text{Hol}(M, \mathcal{F})_x \rightarrow L_x$ est un revêtement (L_x est la feuille contenant x), ainsi l'algébroïde s'identifie à la distribution, $\mathcal{A}\text{Hol}(M, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Le même raisonnement tient pour le groupoïde de monodromie et $\mathcal{A}\text{Mon}(M, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$. On peut en fait montrer qu'en un certain sens, le groupoïde d'holonomie est le "plus petit groupoïde" qui intègre l'algébroïde définie par la distribution.

2.5 De l'algébroïde au groupoïde

2.5.1 Bisections

Définition 2.18. Soit $G \rightrightarrows G^{(0)}$ un groupoïde de Lie. Une translation à gauche est une paire de difféomorphismes $\varphi: G \rightarrow G$, $\varphi_0: G^{(0)} \rightarrow G^{(0)}$ tels que

- $r \circ \varphi = \varphi_0 \circ r$
- $\forall x \in G^{(0)}, \exists g \in G_x^{\varphi_0(x)} / \phi^x = L_g: G^x \rightarrow G^{\varphi_0(x)}$

Définition 2.19. Une bisection locale de G est une application lisse $\sigma: G^{(0)} \rightarrow G$ telle que

- σ est une section de s
- $r \circ \sigma$ est un difféomorphisme de $G^{(0)}$

On note $\mathcal{B}(G)$ l'ensemble des bisections de G .

Si (φ, φ_0) est une translation à gauche, pour $x \in G^{(0)}$ on pose $\sigma(x) = \phi(g)g^{-1}$ pour $g \in G^x$, cela ne dépend pas du choix de g . En effet si $h \in G^x$, il existe ℓ tel que $h = g\ell$. φ étant une translation à gauche, on peut l'écrire sur G^x comme L_θ et ainsi $\varphi(h) = \theta g\ell$, d'où $\varphi(h)h^{-1} = \theta g\ell\ell^{-1}g^{-1} = \varphi(g)g^{-1}$ (on constate d'ailleurs que $\sigma(x) = \theta$). σ est ainsi bien définie et c'est une bisection lisse, en effet $s \circ \sigma(x) = s(g^{-1}) = x$, $r \circ \sigma(x) = r(\phi(g)) = \phi_0(r(g)) = \phi_0(x)$.

Réciproquement si on prend une bisection σ on lui associe la translation à gauche

$L_\sigma: g \rightarrow \sigma(r(g))g$, $(L_\sigma, r \circ \sigma)$ est une translation à gauche. On a ainsi construit une bijection entre les translations à gauches et les bisections. Les translations à gauche étant clairement un groupe pour la composition, on induit alors une structure de groupe sur $\mathcal{B}(G)$ de sorte que $\sigma \mapsto L_\sigma$ soit un (iso)morphisme de groupes. On en décrit la loi de groupe.

Proposition 2.20. Si $\sigma, \tau \in \mathcal{B}(G)$, $x \in G^{(0)}$ on a

- $\sigma \cdot \tau(x) = \sigma(r(\tau(x)))\tau(x)$
- L'identité est donnée par u
- $\sigma^{-1}(x) = \sigma((r \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1}$

Corollaire 2.21. $\sigma \mapsto r \circ \sigma$ induit un morphisme $\mathcal{B}(G) \rightarrow \text{Diff}(G^{(0)})$ (groupe des difféomorphismes).

La définition de bisection manque a priori de symétrie car on a imposé que cela soit une section de s et non pas de r . En fait, à une bijection σ on peut associer son image $L \subset G$, c'est une sous-variété plongée de G sur laquelle $r, s: L \xrightarrow{\sim} G^{(0)}$. Réciproquement étant donné un tel ensemble, il existe une unique bijection l'ayant comme image, on peut ainsi confondre les bisections et leurs images qui présentent plus de symétrie.

Exemple 44. Si $\pi: E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel, on a le groupoïde des repères $\Phi(E) \rightrightarrows M$. Si $\sigma \in \mathcal{B}(\Phi(E))$, on définit un morphisme de fibrés vectoriels $\bar{\sigma}$ via $\bar{\sigma}(u) = \sigma(\pi(u))(u)$.

On a alors $\bar{\text{Id}} = \text{Id}$, $\overline{\sigma \cdot \tau} = \bar{\sigma} \circ \bar{\tau}$ et ainsi $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ est un morphisme de groupes

$\mathcal{B}(\Phi(E)) \rightarrow \text{Aut}(E)$. Réciproquement si $\phi: E \rightarrow E$ est un automorphisme du fibré et qu'on note $f: M \rightarrow M$ l'application induite alors $\sigma(x) := \phi_x \in \Phi(E)_x^{f(x)}$ définit une bisection et $\bar{\sigma} = \phi$. On a donc $\mathcal{B}(\Phi(E)) \cong \text{Aut}(E)$.

On utilisera cette identification lorsque l'on déterminera l'algébroïde de $\Phi(E)$, pour l'instant on regarde l'action sur les sections, si on note encore $\bar{\sigma}$ cette action et si $\mu \in \Gamma(E)$, on a :

$$\bar{\sigma}(\mu)(x) = \sigma((r \circ \sigma)^{-1}(x))\mu((r \circ \sigma)^{-1}(x)), x \in M$$

De même, $\bar{\sigma}$ agit sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty(M)$ via $\bar{\sigma}(f) = f \circ (r \circ \sigma)^{-1}$. On a alors les formules

- $\overline{\sigma \cdot \tau}(\mu) = \bar{\sigma}(\bar{\tau}(\mu))$
- $\bar{\sigma}(\mu_1 + \mu_2) = \bar{\sigma}(\mu_1) + \bar{\sigma}(\mu_2)$
- $\bar{\sigma}(f\mu) = \bar{\sigma}(f)\bar{\sigma}(\mu)$
- $\overline{\sigma^{-1}}(\mu)(x) = \sigma(x)^{-1}\mu((r \circ \sigma)(x))$

On termine par des définitions plus locales qui seront plus pertinentes dans le cas de l'exponentielle que nous introduisons après.

Définition 2.22. Soit $U \subset G^{(0)}$ un ouvert. Une bisection locale de G sur U est une application lisse $\sigma: U \rightarrow G$ telle que

- $s \circ \sigma = \text{Id}_U$
- $r \circ \sigma$ est un difféomorphisme de U sur $(r \circ \sigma)(U)$

On note $\mathcal{B}_U(G)$ cet ensemble.

Comme dans le cas global, σ induit une translation à gauche locale

$$L_\sigma: G^U \rightarrow G^V \\ g \mapsto \sigma(r(g))g$$

où $V = r(\sigma(U))$. De même elle induit une translation à droite locale

$$R_\sigma: G_V \rightarrow G_U \\ g \mapsto g\sigma((r \circ \sigma)^{-1}(s(g)))$$

et un automorphisme intérieur local

$$I_\sigma: G_U^U \rightarrow G_V^V \\ g \mapsto \sigma(r(g))g\sigma(s(g))^{-1}$$

2.5.2 Application exponentielle

Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie et $\mathcal{A}G \rightarrow M$ son algébroïde. On rappelle qu'à une section locale de l'algébroïde $Y \in \Gamma(U, \mathcal{A}G)$ on associe le champ de vecteurs invariant à droite $\vec{Y}(\alpha) = dR_\alpha(Y(r(\alpha)))$. On a alors un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modules

$$\mathcal{C}^\infty(G) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(M)} \Gamma(\mathcal{A}G) \rightarrow \Gamma(T^s G) \\ f \otimes X \mapsto f\vec{X}$$

Si on note $\Gamma^{RI}(T^sG)$ l'espace des champs de vecteurs invariants à droite on a les isomorphismes

$$\begin{aligned}\Gamma^{RI}(T^sG) &\rightarrow \Gamma(\mathcal{A}G) \\ X &\mapsto X \circ u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathcal{A}G) &\rightarrow \Gamma^{RI}(T^sG) \\ X &\mapsto \vec{X}\end{aligned}$$

Ainsi, si on prend une section $X \in \Gamma(\mathcal{A}G)$ elle engendre via \vec{X} des flots locaux $\varphi_t: U \rightarrow U_t$. Puisque \vec{X} est s -vertical, $s \circ \varphi_t = s$ et donc si $U \cap G_x \neq \emptyset$ on a une restriction $\varphi_t: U \cap G_x \rightarrow U_t \cap G_x$. Si $\xi \in G_x^y$, $(R_\xi)_* \vec{X}|_{G_y} = \vec{X}|_{G_x}$ d'où $\varphi_t \circ R_\xi = R_\xi \circ \varphi_t$. Si on note $V_t = r(U_t)$ et ψ_t le flot local défini par

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi_t} & U_t \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ V & \xrightarrow{\psi_t} & U_t \end{array}$$

ψ_t est aussi un difféomorphisme local, d'inverse ψ_{-t} et $\frac{\partial}{\partial t} \psi_t(x)|_{t=0} = r_*(\vec{X}(h))$ où $h \in U \cap G^x$ et ainsi ψ_t est un flot local correspondant à $P(X) = r_*(\vec{X})$.

Proposition 2.23. $\forall t \exists! \sigma_t \in \mathcal{B}_V(G), \varphi_t = L_{\sigma_t}|_U$

Démonstration. Prendre $\sigma_t(x) = \phi_t(h)h^{-1}, h \in U \cap G^x$ □

On déduit alors aisément :

Théorème 2.24. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie, $W \subset M$ un ouvert, $X \in \Gamma(W, \mathcal{A}G)$. Alors pour tout $x_0 \in W$ il existe $V \subset W$ voisinage ouvert de x_0 (voisinage de flot) et $\epsilon > 0$ ainsi qu'une unique famille de bisections locales $\exp(tX) \in \mathcal{B}_V(G)$ telles que pour tout $|t| < \epsilon$ on ait

- i) $\frac{\partial}{\partial t} \exp(tX)|_{t=0} = X$
- ii) $\exp(0X) = \text{Id}_V \in \mathcal{B}_V(G)$
- iii) $\exp((t+t')X) = \exp(tX) \cdot \exp(t'X)$ pour $t, t'/|t|, |t'|, |t+t'| < \epsilon$
- iv) $\exp(-tX) = \exp(tX)^{-1}$
- v) $(r \circ \exp(tX))_t$ est un groupe à un paramètre de transformations pour $p(X)$ sur V

NB. Le point iii) se réécrit, si on rajoute l'hypothèse $r(\exp(t'X(x))) \in V$, en

$$\exp((t+t')X)(x) = \exp(tX)(r(\exp(t'X(x)))) \exp(t'X(x))$$

NB. $(t, x) \mapsto \exp(tX(x))$ est lisse (vient du caractère lisse des flots locaux).

Exemple 45. Si on prend $G = M \times M \rightrightarrows M$ le groupoïde des paires, $X \in \Gamma(\mathcal{A}G) = \mathfrak{X}(M)$ donne un flot $\varphi_t: U \rightarrow U_t$. Le flot de $\vec{X} = X \oplus 0$ est $\varphi_t \times \text{Id}_M$ et ainsi $\exp(tX)$ s'identifie au flot usuel de X , φ_t .

Exemple 46. On prend un fibré en groupes de Lie $\pi: K \rightarrow M$. Si $X \in \Gamma(K_*)$, $\exp(tX)$ est la section globale $x \mapsto \exp(tX(x))$ où $\exp(tX(x))$ est l'exponentielle de l'élément $tX(x)$ de l'algèbre de Lie $(K_*)_x$ vers le groupe de Lie K_x , i.e. on retrouve l'exponentielle usuelle de groupes de Lie fibre à fibre.

Proposition 2.25. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie sur M connexe. Alors $\{\exp(tX(m)), t \in \mathbb{R}, m \in M, X \in \Gamma(\mathcal{A}G)\}$ est la composante s -connexe de l'identité de G .

Démonstration. $\exp(0X(m)) = u(m)$ donc on a une courbe dans G_m joignant $\exp(tX(m))$ et $u(m)$, ainsi notre ensemble est dans la composante s -connexe. Réciproquement, l'image de chaque $\exp(tX)$ est un ouvert de g donc à X fixé, quand t varie, l'union des images est un ouvert s -connexe contenant $u(M)$ et les propriétés de l'exponentielle nous assurent d'avoir un groupoïde donc on a l'égalité. \square

Proposition 2.26. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie, $X \in \Gamma(\mathcal{A}G)$, $g_0 \in G, y_0 = r(g_0)$. La courbe intégrale de \vec{X} passant par g_0 se prolonge indéfiniment dans une direction ssi celle de $p(X)$ passant par y_0 se prolonge indéfiniment dans cette direction. En particulier \vec{X} est complet ssi $p(X)$ l'est.*

Démonstration. r envoie \vec{X} sur $p(X)$ donc de même pour les courbes intégrales, d'où le "seulement si". Réciproquement, on distingue deux cas.

Si $p(X)(y_0) \neq 0$ alors $p(X)(y) \neq 0$ pour tout y sur la courbe intégrale de $p(X)$ passant par y_0 , on note γ cette courbe intégrale, c'est une immersion et on la suppose définie sur \mathbb{R} . On note $\bar{\gamma}:]a; b[\rightarrow G_{x_0}$ la courbe intégrale de \vec{X} passant par $u(y_0)$ et supposons par l'absurde que b est maximal (pour l'intervalle de définition) et fini.

Si $G_{y_0}^{\gamma(b)} \neq \emptyset$ on prend un élément $g \in G_{y_0}^{\gamma(b)}$ et on pose $\delta^g:]b - \epsilon; b + \epsilon[\rightarrow G_{y_0}$ courbe intégrale pour \vec{X} passant par g en b . On a ainsi $r(\delta^g(t)) = \gamma(t)$ et $r(\bar{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ quand ces application sont définies. γ étant une immersion, on peut supposer ϵ assez petit pour que γ soit injective sur $]b - \epsilon; b + \epsilon[$. Soit $\ell \in G_{y_0}^{y_0}$, puisque \vec{X} est invariant à droite, $\delta^{g\ell} := R_\ell \circ \delta^g$ est la courbe intégrale de \vec{X} passant par $g\ell$ en b et elles sont toutes injectives vu le ϵ choisi. On pose alors $S = \gamma(]b - \epsilon; b + \epsilon[)$ et $\tilde{S} = \{h \in G_{y_0}, r(h) \in S\}$ alors

$$\forall h \in \tilde{S}, \exists ! t \in]b - \epsilon; b + \epsilon[, \exists ! \ell \in G_{y_0}^{y_0} / h = \delta^{g\ell}(t)$$

En effet, si $\delta^{g\ell_1}(t_1) = \delta^{g\ell_2}(t_2)$ alors en appliquant le but r on trouve $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ et donc $t_1 = t_2$ par injectivité. Ensuite $\delta^{g\ell_1}$ et $\delta^{g\ell_2}$ étant des courbes intégrales distinctes pour des ℓ distincts, si elles coïncident en un point ce sont les mêmes et donc $\ell_1 = \ell_2$.

Pour l'existence, soit $h \in \tilde{S}$, on prend $t \in]b - \epsilon; b + \epsilon[$ tel que $h \in G_{y_0}^{\gamma(t)}$ or $\delta^g(t) \in G_{y_0}^{\gamma(t)}$ donc soit $\ell \in G_{y_0}^{y_0}$ tel que $h = \delta^g(t)\ell = \delta^{g\ell}(t)$.

Ainsi, si $t \in]b - \epsilon; b[$, $\bar{\gamma}(t) \in \tilde{S}$ donc $\bar{\gamma}(t) = \delta^{g\ell}(t')$ pour un certain ℓ et t' . En appliquant r on trouve $t = t'$ et on peut alors prolonger $\bar{\gamma}$ sur $]a; b + \epsilon[$ ce qui est absurde. On a donc $]a; b[= \mathbb{R}$.

Si en revanche $p(X)(y_0) = 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = y_0$ et on est ramené au cas des groupes de Lie en regardant $G_{y_0}^{y_0}$ et $\vec{X}|_{G_{y_0}^{y_0}}$, le champ de vecteurs invariant à droite engendré par $X(y_0) \in \text{Lie}(G_{y_0}^{y_0})$.

On a ici traité le cas d'une courbe intégrale passant par $u(y_0)$ mais si on prend un g_0 quelconque on se ramène à ce cas par translation à droite. \square

Proposition 2.27. *Soit $F: G \rightarrow G'$ un morphisme de groupoïdes de Lie, V un voisinage de flot de $X \in \Gamma(\mathcal{A}G)$ alors $F(V)$ est un voisinage de flot de $F_*(X)$ et si on note $\tilde{F}: \mathcal{B}_V(G) \rightarrow \mathcal{B}_{F(V)}(G)$ alors pour tout t pour lequel $\exp(tX)$ est bien défini,*

$$\tilde{F}(\exp(tX)) = \exp(tF_*(X))$$

Démonstration. $t \mapsto \tilde{F}(\exp(tX))$ a les mêmes propriétés qui caractérisent $\exp(tF_*(X))$ \square

2.5.3 Application au groupoïde des repères

On utilise ici l'exponentielle définie précédemment pour déterminer l'algèbre de Lie du groupoïde des repères d'un fibré vectoriel. Durant cette section on fixe un fibré vectoriel $\pi: E \rightarrow M$.

Théorème 2.28. Soit $X \in \Gamma(\mathcal{A}\Phi(E))$ on définit $\mathcal{D}(X): \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ où si $\mu \in \Gamma(E)$ et $x \in M$

$$\mathcal{D}(X)(\mu)(x) := -\frac{\partial}{\partial t} \overline{\exp(tX)}(\mu)(x)|_{t=0}$$

Alors $\mathcal{D}(X) \in \Gamma(\mathcal{D}(E))$ et $\mathcal{D}: \Gamma(\mathcal{A}\Phi(E)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{D}(E))$ induit l'isomorphisme d'algébroïdes sur M

$$\mathcal{A}\Phi(E) \cong \mathcal{D}(E)$$

Démonstration. On peut réécrire notre application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X)(\mu)(x) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\exp(tX)((r \circ \exp(tX))^{-1}(x))(\mu)((r \circ \exp(tX))^{-1}(x)) \right]_{|t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp(tX(x))^{-1}(\mu)(r(\exp(tX(x)))) \right]_{|t=0} \end{aligned}$$

Soit $m \in M$, on pose $P = \Phi(E)_m, V = E_m$ et on définit pour $\mu \in \Gamma(E)$ une application

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}: P &\rightarrow V \\ \xi &\mapsto \xi^{-1}\mu(r(\xi)) \end{aligned}$$

Si $X \in \Gamma(\mathcal{A}\Phi(E))$ on note $\bar{X} = \bar{X}|_P$. Par comparaison des flots on obtient

$$\widetilde{\mathcal{D}(X)(\mu)} = \bar{X}(\tilde{\mu})$$

On obtient alors pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\mathcal{D}(X)(f\mu) = f\mathcal{D}(X)(\mu) + p(X)(f)\mu$$

De cette relation, on tire premièrement que $\mathcal{D}(X)$ est un opérateur différentiel d'ordre au plus 1 et est dans $\mathcal{D}(E)$, deuxièmement que \mathcal{D} respecte les ancres.

De la même manière on trouve $\mathcal{D}(fX + Y) = f\mathcal{D}(X) + \mathcal{D}(Y)$ ce qui nous donne un morphisme de fibrés

$$\mathcal{D}: \mathcal{A}\Phi(E) \rightarrow \mathcal{D}(E)$$

Enfin puisque $\overline{[X, Y]} = [\bar{X}, \bar{Y}]$ alors \mathcal{D} respecte le crochet et est ainsi un morphisme d'algébroïdes. Pour voir que c'est un isomorphisme, puisqu'on travaille avec des algébroïdes transitives, il suffit de regarder \mathcal{D}^+ entre les fibrés adjoints, fibre à fibre il correspond à $T_{\text{Id}}(\text{GL}(E_x)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}(E_x)$, c'est donc un isomorphisme. \square

2.6 Survol de la théorie de Lie des groupoïdes

Nous avons vu au travers d'exemples et de certaines discussions que la théorie des groupoïdes de Lie et de leurs algébroïdes étendait celles des groupes et algèbres de Lie et on peut essayer d'étendre la question des trois théorèmes de Lie, nous les rappelons pour fixer les idées.

Théorème 2.29 (Lie). *I - Si G et H sont deux groupes de Lie connexes, simplement connexes tels que $\text{Lie}(G) \cong \text{Lie}(H)$ alors $G \cong H$*
II - Si G, H sont des groupes de Lie, G connexe, simplement connexe et $f: \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H)$ est un morphisme d'algèbres de Lie alors il existe un morphisme de groupes $F: G \rightarrow H$ tel que $d_e F = f$
III - Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie, il existe un unique groupe de Lie connexe simplement connexe G tel que $\text{Lie}(G) \cong \mathfrak{g}$

NB. Les groupes et algèbres de Lie sont ici supposés de dimension finie et l'appellation "unique" est sous-entendue à isomorphisme près.

Remarque 2.3. En fait on a grâce à l'application exponentielle l'unicité dans le deuxième théorème et cette unicité implique immédiatement celle des premier et troisième théorèmes.

On s'intéresse à l'analogue de ces théorèmes pour les groupoïdes et algébroïdes de Lie.

Définition 2.30. Une algébroïde de Lie \mathcal{A} est intégrable si elle est isomorphe à l'algébroïde d'un groupoïde de lie G , on dit que G intègre \mathcal{A} .

On s'attaque d'abord au premier théorème de Lie qui ne pose pas de grands problèmes.

Proposition 2.31. *Soit G un groupoïde s -connexe, il existe un groupoïde \tilde{G} et un morphisme $F: \tilde{G} \rightarrow G$ tels que :*

- \tilde{G} est s -simplement connexe
- \tilde{G} et G ont la même algébroïde de Lie
- F est un difféomorphisme local

De plus \tilde{G} est unique à isomorphisme près.

Démonstration. On feuillette G par les s -fibres et on prend son groupoïde de monodromie (c'est le groupe de monodromie de G que nous avons évoqué lorsque nous avons décrit celui d'un feuilletage $\text{Mon}(G)$). On a une projection sur le point de départ des chemins $pr: \text{Mon}(G) \rightarrow G$ et on prend $\tilde{G} = pr^{-1}(G^{(0)})$, pr est étale donc \tilde{G} est un groupoïde de Lie de même dimension que G , il est formé des classes d'homotopie de chemins dans les s -fibres partant de M . $\tilde{G}_x \rightarrow G_x$ est ainsi le revêtement universel et \tilde{G} est s -simplement connexe.

La restriction de la projection donne un morphisme $\tilde{G} \rightarrow G$ est un difféomorphisme local et ainsi on a un isomorphisme $\mathcal{A}\tilde{G} \cong \mathcal{A}G$.

L'unicité découle du deuxième théorème de Lie (qui est bien sûr indépendant du premier). \square

Corollaire 2.32 (Premier théorème de Lie pour les groupoïdes). *Si G, H sont des groupoïdes de Lie s -simplement connexes tels que leurs algébroïdes soient isomorphes $\mathcal{A}G \cong \mathcal{A}H$ alors $G \cong H$, i.e. étant donné une algébroïde de Lie \mathcal{A} il existe au plus un groupoïde de Lie intégrant \mathcal{A} .*

Le deuxième théorème de Lie est encore vrai pour les groupoïdes et algébroïdes de Lie, sa démonstration n'est pas très compliquée non plus mais nécessite un peu de théorie des feuilletages et des connexions sur les fibrés principaux que nous ne pouvons développer ici, on pourra en trouver la preuve dans [29].

Proposition 2.33 (Deuxième théorème de Lie pour les groupoïdes). *Soient G, H deux groupoïdes de Lie $f: \mathcal{A}G \rightarrow \mathcal{A}H$ un morphisme entre leurs algébroïdes si G est s -simplement connexe alors il existe un unique morphisme de groupoïdes $F: G \rightarrow H$ qui intègre f , i.e. $F_* = f$.*

Jusqu'ici tout semble bien se passer pour la théorie de Lie groupoïdes, de plus toutes les algébroides que nous avons vues semblent avoir un groupoïde les intégrant. Ce n'est cependant pas le cas en général. En effet en 1985 dans [1], Almeida et Molino construisent à partir de feuilletages, des algébroides de Lie non intégrables, l'idée est (par exemple, ils donnent des constructions plus générales) de feuilleter un groupe de Lie simplement connexe par un sous-groupe non fermé. C'est presque 20 ans plus tard en 2003 dans [11] que Crainic et Fernandes trouvent des conditions nécessaires et suffisantes à l'intégrabilité des algébroides de Lie. Nous ne les détaillerons pas ici et renvoyons vers leur article.

3 Aspects analytiques des groupoïdes de Lie

3.1 C*-algèbre d'un groupoïde

On présente ici la construction de Connes dans le cas du groupoïde d'holonomie et sa généralisation par Renault de la C*-algèbre d'un groupoïde. Cette construction étend à la fois celle pour les groupes (que l'on retrouve quand le groupoïde est un groupe) et les fonctions continues sur un espace localement compact (lorsque le groupoïde est réduit aux objets). On présente d'abord sa construction via deux approches : les systèmes de Haar et le fibré des demies densités. La première est plus générale car peut fonctionner pour des groupoïdes localement compacts mais nécessite un choix (de système de Haar) ; la seconde est restreinte aux groupoïdes de Lie mais a l'avantage d'être complètement canonique, elle ne permet cependant de définir proprement que la C*-algèbre réduite.

On traitera ensuite de l'équivalence de Morita, propriété usuelle pour les anneaux que nous adapterons en premier lieu aux C*-algèbres où on a une notion topologique supplémentaire. On donnera ensuite une notion d'équivalence de Morita pour les groupoïdes qui induit une équivalence au niveau des C*-algèbres.

3.1.1 Système de Haar ou demies-densités

Définition 3.1. Soit G un groupoïde localement compact. Un système de Haar (à gauche) est une famille $\nu^\bullet := \{\nu^x, x \in G^{(0)}\}$ de mesures boréliennes régulières positives indexée par $G^{(0)}$ telles que

Support $\forall x \in G^{(0)}, \text{supp}(\nu^x) \subset G^x$

Invariance $\forall \gamma \in G, L_\gamma^* \nu^{s(\gamma)} = \nu^{r(\gamma)}$ i.e.

$$\forall \gamma \in G, \forall f \in \mathcal{C}_c^0(G), \int f(\eta) d\nu^{r(\gamma)}(\eta) = \int f(\gamma\eta) d\nu^{s(\gamma)}$$

Continuité $\forall f \in \mathcal{C}_c^0(G), x \mapsto \int f(\eta) d\nu^x(\eta) \in \mathcal{C}^0(G^{(0)})$

NB. De même on notera ν_\bullet pour un système de Haar à droite, le support est alors dans les s -fibres et pour $\gamma \in G$ on a la condition d'invariance $R_\gamma^* \nu_{r(\gamma)} = \nu_{s(\gamma)}$.

Exemple 47. Un système de Haar sur un groupe localement compact vu comme groupoïde est une mesure de Haar (et réciproquement).

Exemple 48. Si G est un groupoïde réduit à l'ensemble de ses objets : X , un espace localement compact. Un système de Haar est alors une fonction $f \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}_+^*)$, le lien entre les deux ensembles s'obtient par $\nu^x = f(x)\delta_x$. On voit ainsi l'absence d'unicité car deux mesures non équivalentes sur un même espace localement compact peuvent exister.

Remarque 3.1. Soit ν^\bullet un système de Haar à gauche. $\nu_\bullet := \{i^* \nu^x, x \in G^{(0)}\}$ est un système de Haar à droite où i est l'application inverse du groupoïde. On a ainsi une bijection canonique entre les systèmes de Haar à gauche et à droite.

△ Contrairement aux mesures de Haar sur les groupes localement compacts, un système de Haar n'existe pas nécessairement (en fait si un tel système existe, les applications r, s sont ouvertes, ce qui n'est pas toujours vrai dans le cas localement compact) et les systèmes de Haar ne sont pas uniques (à multiplication par une fonction continue près). Cependant dans le cas des groupoïdes de Lie on retrouve ces propriétés et dans le cas général, la C^* -algèbre que l'on va construire ne dépendra du système de Haar qu'à équivalence forte de Morita près (si par contre on prend deux systèmes de Haar équivalents, les C^* -algèbres seront isomorphes). L'objet d'étude étant en général la K -théorie de cette C^* -algèbre, celle-ci étant invariante par équivalence forte de Morita le choix d'un système de Haar n'influe pas sur cette K -théorie.

Définition 3.2. Soit M une variété différentiable, $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Le fibré des demies-densités est $\Omega^{1/2}(E)$ où

$$\Omega^{1/2}(E)_x = \{\rho: \Lambda^{\text{rg}(E)} E_x \rightarrow \mathbb{C} / \forall v \in \Lambda^{\text{rg}(E)} E_x, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \rho(\lambda v) = |\lambda|^{1/2} \rho(v)\}$$

Une trivialisaton de $\Lambda^{\text{rg}(E)} E$ en donne une de $\Omega^{1/2}(E)$, le premier étant trivial, le deuxième l'est lui aussi.

Définition 3.3. Pour un groupoïde de Lie G on note $\Omega^{1/2}$ le fibré vectoriel donné par

$$\forall \gamma \in G, \Omega_\gamma^{1/2} = \Omega_{s(\gamma)}^{1/2}(T^s G) \otimes \Omega_{r(\gamma)}^{1/2}(T^r G)$$

Ce fibré est lui aussi trivial, un choix de trivialisaton (continue) donne un système de Haar et réciproquement tout système de Haar s'obtient comme trivialisaton continue du fibré $\Omega^{1/2}$. On en déduit :

Proposition 3.4. Si G est un groupoïde de Lie alors il possède un système de Haar. De plus si ν^\bullet, μ^\bullet sont deux systèmes de Haar alors il existe $f \in \mathcal{C}^0(G^{(0)}, \mathbb{R}_+^*)$ tel que

$$\forall x \in G^{(0)}, \nu^x = f(x) \mu^x$$

On a un système de Haar naturellement en considérant la mesure de Lebesgue sur les fibres d'un groupoïde de Lie, cependant, la construction de Connes du fibré des demies-densités est beaucoup plus canonique et ne dépend pas de choix de constantes comme cela pourrait être le cas pour la mesure de Lebesgue. Cela implique en particulier que deux C^* -algèbres associées à deux systèmes de Haar d'un groupoïde de Lie seront isomorphes, on a donc plus que l'équivalence forte de Morita du cas localement compact.

On va maintenant décrire l'approche de Connes pour définir la C^* -algèbre réduite du groupoïde. On détaillera l'approche de Renault via les systèmes de Haar dans la section suivante en insistant sur les représentations unitaires des groupoïdes.

Dans son article [9], Connes définit l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(G, \Omega^{1/2})$ pour le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage, dans le cas séparé, il s'agit bien des sections à support compact. Dans le cas non séparé, Connes donne une autre définition (qui coïncide dans le cas séparé).

Définition 3.5. Soit $\chi: U \rightarrow R^{\dim(G)}$ une carte locale, $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(R^{\dim(G)})$ de support inclus dans l'image de χ , on obtient alors une fonction $\phi \circ \chi$ sur G en la prolongeant par 0 en dehors de U . On note $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ l'espace vectoriel engendré par de telles fonctions. On obtient de la même manière un espace $\mathcal{C}_c^\infty(G, \Omega^{1/2})$.

△ Cet espace n'est pas stable par produit ponctuel des fonctions. De plus ces fonctions ne sont pas forcément continues.

Définition 3.6. On munit $\mathcal{C}_c^\infty(G, \Omega^{1/2})$ d'un produit de convolution et d'un adjoint. Soient $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(G, \Omega^{1/2}), \gamma \in G$, on pose

$$f * g(\gamma) = \int_{\gamma_1 \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1) g(\gamma_2)$$

et

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$$

Explicitons ces constructions : supposons que $\gamma \in G_x^y$, on fixe $(v_x, v_y) \in \Lambda^{max} T_x^s G \times \Lambda^{max} T_y^r G$. $\eta \mapsto f(\eta)g(\eta^{-1}\gamma)$ est alors une 1-densité sur G^y et peut donc être intégrée en $f * g(\gamma)(v_x \otimes v_y)$. Pour l'adjoint on a

$$f^*(\gamma)(v_x \otimes v_y) = \overline{f(\gamma^{-1})(v_y \otimes v_x)}$$

Proposition 3.7. $\mathcal{C}_c^\infty(G, \Omega^{1/2})$ muni de ces deux opérations est une algèbre involutive.

Démonstration. La stabilité se voit en trivialisant le fibré, on est ramené à une convolution classique de fonctions \mathcal{C}_c^∞ qui se traite en dérivant sous le signe intégral. On renvoie à l'article de Connes [9] pour le cas non séparé. \square

On veut en faire une C^* -algèbre. Pour cela il nous faudrait une norme, l'idée de Connes est de regarder certaines représentations naturelles sur lesquelles on a une norme et de prendre le sup de ces normes, la complétion de $\mathcal{C}_c^\infty(G, \Omega^{1/2})$ pour cette norme donnera une C^* -algèbre appelée la C^* -algèbre réduite du groupoïde.

Si $x \in G^{(0)}$ on a une représentation $\pi_x: \mathcal{C}_c^\infty \rightarrow \mathcal{L}(L^2(G_x))$ via

$$(\pi_x(f) \cdot \xi)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1) \xi(\gamma_2)$$

où ξ est une demi-densité intégrable sur G_x . De plus $\gamma \in G$ donne une isométrie $L^2(G_{s(\gamma)}) \rightarrow L^2(G_{r(\gamma)})$ entretenant $\pi_{s(\gamma)}$ et $\pi_{r(\gamma)}$.

Définition 3.8. On pose $\|f\|_{min} := \sup_{x \in G^{(0)}} \|\pi_x(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(G_x))}$, c'est une norme sur $\mathcal{C}_c^\infty(G, \Omega^{1/2})$.

On définit alors la C^* -algèbre réduite du groupoïde G comme

$$C_{red}^*(G) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(G, \Omega^{1/2})}^{\|\cdot\|_{min}}$$

3.1.2 Représentations unitaires et C^* -algèbre

Définition 3.9. Un fibré de Hilbert est un triplet (X, K, μ) où X est un espace topologique à base dénombrable, séparé localement compact, μ est une mesure de Radon sur X et $K \rightarrow X$ est un fibré en espaces de Hilbert séparables.

Soit $G \rightrightarrows G^{(0)}$ un groupoïde localement compact. On supposera dorénavant fixé un système de Haar à gauche λ^\bullet sur G . Soit μ une mesure de Radon sur $G^{(0)}$, on lui associe la mesure sur G

$$\nu = \int_{G^{(0)}} \lambda^u d\mu(u)$$

Si on pose $\nu^{-1} = i^* \nu$ on obtient une autre mesure sur G , elle peut d'obtenir de la même manière que ν mais via le système de Haar à droite associé, $\lambda_\bullet: \nu^{-1} = \int_{G^{(0)}} \lambda_u d\mu(u)$. Enfin on pose

$$\nu^2 = \int_{G^{(0)}} \lambda^u \otimes \lambda_u d\mu(u)$$

C'est une mesure sur $G^{(2)}$.

Définition 3.10. μ est dite quasi-invariante (par l'action de G) si ν et ν^{-1} sont équivalentes. Dans ce cas, la dérivée de Radon-Nicodym $D = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ est appelée fonction modulaire associée.

Comme dans le cas des groupes, la fonction modulaire est un morphisme de groupes, la preuve est cependant plus complexe et on renvoie pour cela à l'article de Hahn [22].

Proposition 3.11. On pose $\nu_0 = D^{-1/2}\nu$ alors ν_0 est i -invariante.

Démonstration. On a $D(x^{-1}) = D(x)^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} i^* \nu_0 &= D^{1/2} i^* \nu \\ &= D^{1/2} \nu^{-1} \\ &= D^{-1/2} \nu \\ \nu_0^{-1} &= \nu_0 \end{aligned}$$

□

De même, on a vu que $G^{(2)}$ possède une structure naturelle de groupoïde, on peut donc construire $(\nu^2)^{-1}$, on rappelle que l'inversion est donnée par $(x, y) \mapsto (xy, y^{-1})$. On pose ρ la fonction modulaire de $G^{(2)}$. Elle est associée à ν via le système de Haar $(\lambda^u \otimes \lambda_u)_u$. On peut se demander si il y a un lien entre ρ et D pour simplifier d'éventuels changements de variables $(x, y) \mapsto (xy, y^{-1})$. La réponse est donnée par Hahn dans [22] via la relation

$$\rho(x, y) = D(y) = D(xy)D(x)^{-1}$$

NB. C'est en fait cette relation qui permet de montrer que D est un morphisme de groupes.

On l'utilisera plus tard lorsque l'on induira des *-représentations de $\mathcal{C}_c^0(G)$ via des représentations unitaires de G qu'il nous faut à présent introduire.

Définition 3.12. Une représentation unitaire de G est la donnée d'un fibré de Hilbert $(G^{(0)}, K = \{K_u, u \in G^{(0)}\}, \mu)$ avec μ G -quasi invariante et d'un morphisme de groupoïdes $L: G \rightarrow Iso(K)$ mesurable i.e.

- $\forall u \in G^{(0)}, L(u) = \text{Id}_{K_u}$
- $L(x)L(y) = L(xy)$ ν^2 -pp
- $L(x)^{-1} = L(x^{-1})$ ν -pp
- Si $\xi, \eta \in L^2(G^{(0)}, K, \mu)$ sont des sections L^2 , $x \mapsto \langle L(x)\xi(s(x)), \eta(r(x)) \rangle$ est mesurable.

Il reste à expliciter ce qu'est une section mesurable. On se donne pour cela une suite de sections $(f_n)_n$ telle que $\forall m, n, u \mapsto \langle f_m(u), f_n(u) \rangle$ soit mesurable et $\forall u \in G^{(0)}, \overline{\text{Vect}(f_n(u), n)} = K_u$. On peut alors supposer la famille (f_n) orthonormale et une section f est alors mesurable ssi $\forall n, u \mapsto \langle f(u), f_n(u) \rangle$ est mesurable. On obtient alors en utilisant le produit scalaire des différents espaces de Hilbert un espace $L^2(G^{(0)}, K, \mu)$, c'est un espace de Hilbert.

De manière équivalente, on peut définir une représentation de G via :

- Une mesure de Radon μ sur $G^{(0)}$ quasi-invariante
 - Une fonction $\varphi: G^{(0)} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ mesurable avec $\varphi \leq 1$ μ -pp et constante le long des orbites (i.e. $\varphi \circ r = \varphi \circ s$)
 - Une application mesurable U telle que $U(x) \in Iso(\mathbb{C}^{\varphi(s(x))})$ et $U(xy) = U(x)U(y)$ ν^2 -pp.
- On peut inclure les espaces \mathbb{C}^k les uns dans les autres : on pose

$$\begin{aligned} H_k &= \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \forall n \geq k, x_n = 0\} \subset \ell^2(\mathbb{N}) \\ \mathcal{H}(\mu, \varphi) &= \{\xi: G^{(0)} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \text{ mesurable} \mid \forall x, \xi(x) \in H_{\varphi(x)}\} \end{aligned}$$

On peut écrire $\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i + \mu_{+\infty}$ avec $\mu_i = \mu(\cdot \cap \varphi^{-1}(i))$, ce sont des mesures boréliennes quasi-invariantes et on décompose ainsi la représentation en somme de représentations où $u \mapsto \dim(K_u)$ est constante. On obtient alors une représentation à valeurs dans $L^2(G^{(0)}, \mu) \otimes H$ où H est un espace de Hilbert séparable.

Exemple 49. La représentation régulière s'obtient en prenant $K_u = L^2(G^u, \lambda^u)$.

On aura besoin de normer $\mathcal{C}_c^0(G)$. On met une norme L^1 a priori, elle ne servira qu'à déterminer quelles représentations sont continues ou non. On pose donc

$$\|f\|_I = \max \left(\sup_{x \in G^{(0)}} \int_{G^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma), \sup_{x \in G^{(0)}} \int_{G^x} f(\gamma^{-1}) d\lambda^x(\gamma) \right)$$

Proposition 3.13. Si on se donne une représentation $(G^{(0)}, K, \mu, L)$ de G , on induit une $*$ -représentation de $\mathcal{C}_c^0(G)$ via L en posant, pour $\xi, \eta \in L^2(G^0, K, \mu)$ et $f \in \mathcal{C}_c^0(G)$

$$\langle L(f)\xi, \eta \rangle = \int_G f(x) \langle L(x)\xi(s(x)), \eta(r(x)) \rangle d\nu_0(x)$$

De plus deux représentations équivalentes de G donnent des $*$ -représentations équivalentes de G
Démonstration.

$$\begin{aligned} |\langle L(f)\xi, \eta \rangle| &\leq \int_G |f(x)| \|\xi(s(x))\| \|\eta(r(x))\| d\nu_0(x) \\ &\leq \left(\int_G |f(x)| \|\xi(s(x))\|^2 d\nu^{-1}(x) \right) \left(\int_G |f(x)| \|\eta(r(x))\|^2 d\nu(x) \right) \\ &\leq \left(\int_G |f(x)| d\lambda_u(x) \int_{G^{(0)}} \|\xi(u)\|^2 d\mu(u) \right) \left(\int_G |f(x)| d\lambda^u(x) \int_{G^{(0)}} \|\eta(u)\|^2 d\mu(u) \right) \\ &\leq \|f\|_I \|\xi\| \|\eta\| \end{aligned}$$

ainsi $L(f) \in \mathcal{L}(L^2(G^{(0)}, \mu) \otimes K)$ et $\|L(f)\| \leq \|f\|_I$ donc la représentation est continue. On montre que maintenant L est un morphisme d'algèbres involutives, pour cela, on calcule en premier lieu $\langle L(f * g)\xi, \eta \rangle$ via Fubini et on obtient

$$\int f(xy)g(y^{-1}) \langle L(x)\xi(s(x)), \eta(r(x)) \rangle D^{1/2}(x) d\nu^2(x, y)$$

On calcule de même $\langle L(f)L(g)\xi, \eta \rangle$ et on obtient

$$\int \int f(x)g(y) \langle L(x)L(y)\xi(s(y)), \eta(r(x)) \rangle D^{-1/2}(y) d\lambda^{s(x)}(y) d\lambda_u(x) d\mu(u)$$

On fait alors le changement de variables $(x, y) \mapsto (xy, y^{-1})$ la deuxième quantité devient

$$\int f(xy)g(y^{-1}) \langle L(x)\xi(r(y)), \eta(r(x)) \rangle D^{1/2}(x) d\nu^2(x, y)$$

on conclue alors en utilisant que $(x, y) \in G^{(2)} \Leftrightarrow s(x) = r(y)$ et en prenant ξ, η quelconques que $L(f * g) = L(f)L(g)$. Il reste enfin à vérifier la compatibilité avec l'adjoint :

$$\begin{aligned} \langle L(f^*)\xi, \eta \rangle &= \int \overline{f(x^{-1})} \langle L(x)\xi(s(x)), \eta(r(x)) \rangle d\nu_0(x) \\ &= \int \overline{f(x)} \langle L(x)^{-1}\xi(r(x)), \eta(s(x)) \rangle d\nu_0(x) \\ &= \int \overline{f(x)} \langle \xi(r(x)), L(x)\eta(s(x)) \rangle d\nu_0(x) \\ &= \langle \xi, L(f)\eta \rangle \end{aligned}$$

et donc $L(f^*) = L(f)^*$ et L est une $*$ -représentation.

On doit maintenant montrer que deux G -représentations unitaires équivalentes induites des $*$ -représentations équivalentes. Supposons que (μ, K, L) et (μ', K', L') soient deux représentations unitaires de G équivalentes. μ et μ' sont équivalentes, on prend donc $g = \frac{d\mu'}{d\mu}$ et $\Phi: K \rightarrow K'$ qui entrelace L et L' . A un vecteur $\xi \in L^2(G^{(0)}, K, \mu)$ on associe $\xi' \in L^2(G^{(0)}, K', \mu')$ via $\xi'(u) = g^{-1/2}(u)\Phi(u)\xi(u)$ alors on va montrer que $\xi \mapsto \xi'$ est une isométrie qui entrelace les deux $*$ -représentations, le caractère isométrique étant clair, il suffit de montrer l'entrelacement. On note D, D' les fonctions modulaires respectives de μ, μ' , on a alors la relation

$$D'(x) = g(r(x))D(x)(g(s(x)))^{-1}, x - pp$$

et donc d'un coté

$$L(f)\xi(u) = \int f(x)L(x)\xi(s(x))D^{-1/2}(x) d\lambda^u(x)$$

et de l'autre

$$\begin{aligned} L'(f)\xi'(u) &= \int f(x)L'(x)\xi'(s(x))D'^{-1/2}(x) d\lambda^u(x) \\ &= \int f(x)L'(x)(g(s(x)))^{-1/2}\Phi(s(x))\xi(s(x))(g(r(x)))^{-1/2}D^{-1/2}(x)(g(s(x)))^{1/2} d\lambda^u(x) \\ &= \int f(x)g(u)^{-1/2}\Phi(u)L(x)\xi(s(x))D^{-1/2}(x) d\lambda^u(x) \\ &= (L(f)\xi)'(u) \end{aligned}$$

□

Définition 3.14. On définit les normes max et min sur $\mathcal{C}_c^0(G)$ via

$$\|f\|_{\max} = \sup_{\pi \text{ } * \text{-rep bornée}} \|\pi(f)\|$$

$$\|f\|_{\min} = \sup_{x \in G^{(0)}} \|\pi^x(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(G^x))}$$

et leurs complétés respectifs donnent les C^* -algèbres pleines et réduites du groupoïde

$$C^*(G) = \overline{\mathcal{C}_c^0(G)}^{\|\cdot\|_{\max}}, C_r^*(G) = \overline{\mathcal{C}_c^0(G)}^{\|\cdot\|_{\min}}$$

Remarque 3.2. Ces algèbres dépendent a priori du choix de système de Haar que l'on a fait. On verra cependant que ce n'est le cas qu'à équivalence de Morita forte près (voir ci-dessous) ce qui n'influe donc pas quand on regarde leur K, KK -théorie.

NB. Dans le cas des groupoïdes de Lie on obtient la même C^* -algèbre qu'avec les demies densités. En effet, on passe de $\mathcal{C}_c^\infty(G, \Omega^{1/2})$ à $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ en trivialisant le fibré et on obtient la même algèbre car $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ est dense dans $\mathcal{C}_c^0(G)$ pour la norme L^2 de la représentation régulière.

Théorème 3.15 (Renault). *Toute $*$ -représentation de $\mathcal{C}_c^0(G)$ provient d'une G -représentation unitaire et les équivalences sont préservées, dit autrement l'application de représentation induite est une équivalence entre la catégorie des G -représentations unitaires à équivalence près et celle des $*$ -représentations de $\mathcal{C}_c^0(G)$ à équivalence près.*

On ne rentrera pas dans le détail de cette preuve que l'on peut trouver dans le livre de Renault [35] avec une hypothèse technique supplémentaire (qui est en fait vérifiée pour notre définition de groupoïde localement compact) ou dans le livre de Paterson [34].

Corollaire 3.16. *Soit X un espace topologique à base dénombrable localement compact séparé, $G = X \times X \rightrightarrows X$ le groupoïde des paires, on le munit d'un système de Haar induit par une mesure μ sur X alors*

$$C^*(G) = C_r^*(G) = \mathcal{K}(L^2(X, \mu))$$

Démonstration. On réalise $C^*(G)$ sur un espace de Hilbert et la *-représentation canonique $\mathcal{C}_c^0(G) \rightarrow C^*(G)$ est alors induite par une G -représentation unitaire $(\kappa, \{H_u\}, L)$. Le groupoïde est transitif donc $\forall u, v \in G^{(0)}, H_u \cong H_v$ et on peut donc considérer l'algèbre comme agissant sur $L^2(G^{(0)}, \kappa) \otimes H$. Soit ν la mesure sur G induite par κ , on a $\nu = \kappa \times \mu$ et $\nu^{-1} = \mu \times \kappa$, puisque par hypothèse $\nu \sim \nu^{-1}$ on en déduit que $\kappa \sim \mu$ et on peut ainsi supposer $\kappa = \mu$. Soit $\xi \in L^2(X, \mu) \otimes H$, on a

$$\begin{aligned} L(f)\xi(x) &= \int_X f(x, y)L(x, y)\xi(y) \, d\mu(y) \\ &= \int_X f(x, y)L(x, x_0)(L(x_0, y)\xi(y)) \, d\mu(y) \end{aligned}$$

Ainsi si on pose $T\xi(y) = L(x_0, y)\xi(y)$ alors T est un unitaire de $L^2(X, \mu) \otimes H$ et si on pose $\tilde{L} = TLT^{-1}$ on obtient que $C^*(G)$ est aussi généré par $\tilde{L}(\mathcal{C}_c^0(G))$ et $\tilde{L}(f)\xi(x) = \int_X f(x, y)\xi(y) \, d\mu(y)$, l'image est donc constituée des opérateurs à noyau qui sont dense dans les compacts et on obtient le résultat. Le même raisonnement s'applique pour la réduite. \square

Exemple 50. *Si G est un groupe on retrouve les C^* -algèbres pleines et réduites usuelles.*

Exemple 51. *Si $G = (X \rightrightarrows X)$ alors $C^*(G) = C_r^*(G) = \mathcal{C}_0^0(G)$ (on retrouve le théorème de Gelfand)*

Exemple 52. *Si $G = (E \rightarrow M)$ est un fibré vectoriel alors on obtient via la transformée de Fourier $C^*(G) = \mathcal{C}_0^0(E^*)$*

Exemple 53. *Si $\pi: M \rightarrow B$ est une submersion surjective, on regarde le groupoïde $M \times_B M \rightrightarrows M$ alors un raisonnement similaire à celui pour le groupoïde des paires donne $C^*(M \times_B M) = C_r^*(M \times_B M) = \mathcal{C}^0(B, \mathcal{K}(L^2(X, \mu)))$*

Proposition 3.17. *Soit $U \subset G^{(0)}$ un ouvert saturé (i.e. G -stable, $U = r(s^{-1}(U)) = s(r^{-1}(U))$) alors on a la suite exacte*

$$0 \longrightarrow C^*(G_U) \xrightarrow{i} C^*(G) \xrightarrow{r} C^*(G_F) \longrightarrow 0$$

où F est le complémentaire de U

Démonstration. Une fonction continue à support compact sur U s'étend par 0 sur F . \square

\triangleleft Cette functorialité n'est pas valable pour la C_r^* , c'est une difficulté par exemple pour la conjecture de Baum-Connes car un des cotés de la conjecture est fonctoriel et l'autre non et on sait que la conjecture est fautive pour la C^* -algèbre pleine à cause de la propriété (T) (problème déjà valable pour le cas des groupes)

3.1.3 Équivalence de Morita

Pour les anneaux

Définition 3.18. Soient A, B deux anneaux, ils sont équivalents au sens de Morita si il existe un (A, B) -bimodule ${}_A M_B$ tel que

- M est un A -module fidèle projectif de type fini
- M est un B -module fidèle et cette structure de module induit l'isomorphisme $B \cong \text{End}_A(M)$

Cette définition est symétrique en A et B . On peut en donner une version équivalente, plus éclairante sur le sens de cette équivalence.

Proposition 3.19.

$$\begin{aligned} B - \mathbf{mod} &\rightarrow A - \mathbf{mod} \\ P &\mapsto M \otimes_B P \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories

En fait une telle équivalence de catégories est équivalente à une équivalence de Morita.

Exemple 54. Si $R \cong R'$ alors $R \sim_{mor} R'$. $R \sim_{mor} \mathcal{M}_n(R), \forall n$.

L'équivalence de Morita préserve certaines propriétés comme le fait d'être simple, semi-simple, noethérien, artinien mais certaines comme le fait d'être commutatif, local ou intègre ne sont pas conservées. On renvoie vers [28] pour une présentation plus détaillée.

Proposition 3.20. Si A et B sont deux anneaux Morita-équivalents alors leurs catégories de modules projectifs sont équivalentes

Cette proposition est importante car la K -théorie se construit à partir des modules projectifs, l'équivalence de Morita est donc une condition permettant d'avoir des isomorphismes en K -théorie.

Pour les C^* -algèbres

Définition 3.21. Un module hermitien sur une C^* -algèbre A est un espace de Hilbert sur lequel A agit (i.e. on a un $*$ -homomorphisme $A \rightarrow \mathcal{L}(H)$). On dit que deux C^* -algèbres A, B sont équivalentes au sens de Morita si leurs catégories de modules hermitiens sont équivalentes via un foncteur préservant les adjoints.

Cette notion n'est cependant pas assez fine dans le cas des C^* -algèbres et serait plus adaptée pour des algèbres de Von-Neumann.

Définition 3.22. Un module préhilbertien (ou pré- C^* -module) sur une C^* -algèbre A est un A -module à droite E avec une forme $(\cdot, \cdot)_A: E \times E \rightarrow A$ sesquilinéaire définie positive (au sens des éléments positifs de A) tel que $(x, y \cdot a)_A = (x, y)_A \cdot a$, on munit E de la norme $\|x\| = \sqrt{\|(x, x)_A\|}$. Le module est dit hilbertien (on parle aussi de C^* -module) si il est complet pour cette norme.

Les morphismes entre deux modules hilbertien sont les applications A -linéaires continues possédant un adjoint.

Définition 3.23. Deux C^* -algèbres A, B sont fortement Morita équivalentes si il existe un (A, B) -bimodule X qui est un A -module hilbertien à gauche et un B -module hilbertien à droite et qu'on a de plus

- $\forall x, y, z \in X, (x, y)_A z = x(y, z)_B$
- $\overline{\text{Vect}}((X, X)_A) = A, \overline{\text{Vect}}((X, X)_B) = B$

Théorème 3.24 (Rieffel). *Si X est un (A, B) -bimodule d'équivalence alors $E \rightarrow X \otimes_B E$ est une équivalence entre les catégories de A -modules hermitiens et ceux des B -modules hermitiens.*

En particulier une équivalence forte de Morita induit une équivalence de Morita.

Théorème 3.25 (Brown, Green, Rieffel). *Si A et B sont des C^* -algèbres séparables ou unitaires (on veut une unité approchée dénombrable) alors elles sont fortement Morita-équivalentes si et seulement si elles sont stablement équivalentes i.e. $A \otimes \mathcal{K} \cong B \otimes \mathcal{K}$ où \mathcal{K} est l'algèbre des opérateurs compacts d'un espace de Hilbert séparable.*

Ce théorème nous permet ainsi d'obtenir les résultats que nous voulions, à savoir des isomorphismes en K -théorie et KK -théorie (mais aussi en E -théorie), ces théories étant invariantes par stables équivalences.

Pour les groupoïdes On va maintenant décrire la notion de bimodule pour des paires de groupoïdes et montrer comment cette notion d'équivalence de Morita entre groupoïdes induit une équivalence forte de Morita au niveau des C^* -algèbres.

Définition 3.26. Soit G un groupoïde localement compact. Un G -fibré à gauche est un espace P sur lequel G agit à gauche et une submersion surjective G -invariante $\pi: P \rightarrow B$. Il est dit principal si l'application

$$\begin{aligned} G \times_{G^{(0)}} P &\rightarrow P \times_{\pi} P \\ (g, p) &\mapsto (gp, p) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme (difféomorphisme dans le cas lisse). On peut résumer les G -fibrés à gauche par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \curvearrowright & \\ G & & P \\ \Downarrow & \swarrow & \downarrow \pi \\ G^{(0)} & & M \end{array}$$

Définition 3.27. Soient G, H deux groupoïdes (localement compacts), une équivalence de Morita entre G et H est la donnée d'un (G, H) -bifibré principal, i.e. on a un espace topologique P avec des applications continues $\alpha: P \rightarrow G^{(0)}$ faisant de P un G -fibré principal à gauche et $\beta: P \rightarrow H^{(0)}$ en faisant un H -fibré principal à droite et les deux actions commutent. On le résume via le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ G & & P & & H \\ \Downarrow & & \swarrow \alpha & \searrow \beta & \Downarrow \\ G^{(0)} & & & & H^{(0)} \end{array}$$

Puisque les deux actions commutent et que les fibrés sont principaux on a les isomorphismes de groupoïdes

$$*\alpha^*(G) = P \times_{G^{(0)}} G \times_{G^{(0)}} P = P \times_{G^{(0)}} P \times_{H^{(0)}} P = P \times_{H^{(0)}} H \times_{H^{(0)}} P = *\beta^*(H)$$

Exemple 55. *Si $G \cong H$ alors ils sont équivalents au sens de Morita. Un bifibré d'équivalence est donné par le graphe de l'isomorphisme avec la projection sur chaque facteur*

Exemple 56. Deux groupes localement compacts vus comme groupoïdes sont Morita équivalents si et seulement si ils sont isomorphes.

Exemple 57. Soit G un groupoïde, $\varphi: M \rightarrow G^{(0)}$ une application ouverte surjective, alors $G \times_{G^{(0)}} M$ induit une équivalence de Morita entre G et ${}^*\varphi^*(G)$. Cela montre que l'équivalence de Morita est très différente d'un isomorphisme car un groupoïde et son tiré en arrière sont rarement isomorphes (φ n'a aucune raison d'être injective) mais toujours Morita équivalents.

Exemple 58. Si (M, \mathcal{F}) est feuilletée et $N \subset M$ est une sous-variété transverse au feuilletage rencontrant toutes les feuilles. Alors $\text{Hol}(M, \mathcal{F})$ et $\text{Hol}(M, \mathcal{F})_N^N$ sont Morita-équivalents via G_N . Plus généralement si G est un groupoïde de Lie et $N \subset G^{(0)}$ est une sous-variété fermée rencontrant transversalement toutes les orbites alors G_N induit une équivalence de Morita entre G et G_N^N . En particulier si G est transitif il est Morita-équivalent au groupe d'isotropie de n'importe laquelle de ses unités.

En fait l'équivalence de Morita pour les groupoïdes, à l'instar de celle pour les anneaux, ne voit pas de nombreuses propriétés des groupoïdes. Elle est en revanche relativement fidèle de la géométrie transverse du groupoïde :

Proposition 3.28. Si P réalise une équivalence de Morita entre les groupoïdes G et H alors

- Il existe un homéomorphisme entre les orbites $\Phi: G^{(0)}/G \xrightarrow{\sim} H^{(0)}/H$
- Il existe des isomorphismes $\phi: G_x^x \xrightarrow{\sim} H_y^y$ pour tous les $(x, y) \in G^{(0)} \times H^{(0)}$ dès que $\Phi(\mathcal{O}_x) = \mathcal{O}_y$

Démonstration. Soit $x \in G^{(0)}$, $\alpha^{-1}(x)$ est une H -orbite et elle se projette donc via β sur une H -orbite $\beta(\alpha^{-1}(x))$ de $H^{(0)}$, cette orbite ne change pas si on prend un autre élément de la même G -orbite de $G^{(0)}$ car α est G -équivariante et β est G -invariant. On a ainsi construit Φ et elle est clairement bijective, les rôles de G et H étant symétriques. C'est de plus un homéomorphisme car les ouverts bi-invariants de P correspondent aux ouverts invariants de G et H donc on a la continuité.

Prenons à présent $x \in G^{(0)}$, $y \in H^{(0)}$, $\Phi(\mathcal{O}_x) = \mathcal{O}_y$. Soit alors $p \in P$ tel que $\alpha(p) = x$, $\beta(p) = y$, il induit alors un isomorphisme $\phi_p: G_x^x \rightarrow H_y^y$ déterminé par la relation $gp = p\phi_p(g)$. \square

Supposons que P induise une équivalence de Morita entre G et H . On construit un groupoïde $L \rightrightarrows G^{(0)} \sqcup H^{(0)}$ de sorte que $L_{G^{(0)}}^{G^{(0)}} = G$, $L_{H^{(0)}}^{H^{(0)}} = H$, $L_{G^{(0)}}^{H^{(0)}} = P$. On pose $L = G \sqcup P \sqcup P^{-1} \sqcup H$ (P^{-1} désigne une copie de P où les actions de G et H sont inversées), les applications de structure sont claires sur G, H , décrivons ce qu'il se passe avec les éléments de P et P^{-1} . Soit $\xi \in P$, sa source est $\alpha(\xi)$ et son but $\beta(\xi)$ si on voit $\xi \in P^{-1}$ il faut inverser la source et le but. On peut composer $\xi \in P$ à la source par un élément de G via la structure de G -espace à gauche et au but par des éléments de H , de même pour P^{-1} . L'inverse d'un élément $\xi \in P$ est le même élément vu comme appartenant à P^{-1} . L'associativité provient du fait que les deux actions commutent. Du fait que le fibré soit principal pour les deux groupoïdes, on en déduit que, si $x \in G^{(0)}$, $\alpha^{-1}(x)$ est une H -orbite et donc il existe une flèche de x vers tous les éléments de la H -orbite $\beta(\alpha^{-1}(x))$, si on prend un gx avec $g \in G$ alors $\alpha^{-1}(gx) = g\alpha^{-1}(x)$ et donc cet élément est encore envoyé sur les éléments de $\beta(\alpha^{-1}(x))$. Le groupoïde L consiste donc à rajouter des flèches entre les orbites de G et H s'intersectant dans P .

On peut ainsi donner une définition équivalente de l'équivalence de Morita :

Proposition 3.29. *Les groupoïdes G, H sont Morita équivalents si et seulement si il existe $L \rightrightarrows G^{(0)} \sqcup H^{(0)}$ tel que*

- $L_{G^{(0)}}^{G^{(0)}} = G$
- $L_{H^{(0)}}^{H^{(0)}} = H$
- $\forall \gamma \in L, \exists \eta \in L_{G^{(0)}}^{H^{(0)}} \cup L_{H^{(0)}}^{G^{(0)}}, (\gamma, \eta) \in L^{(2)}$

Démonstration. On a construit le groupoïde en question. Si on se donne un tel groupoïde alors $P = L_{G^{(0)}}^{H^{(0)}}$ est un bi-fibré induisant une équivalence de Morita entre G et H \square

Proposition 3.30. *Si G, H sont Morita-équivalents alors leurs catégories d'espaces à gauche (ou droite) sont équivalentes.*

Démonstration. On fait comme dans le cas des anneaux mais le produit tensoriel est remplacé par un produit fibré. \square

Théorème 3.31 (Muhly, Renault, Williams). *Soient $(G, \lambda^\bullet), (H, \eta^\bullet)$ deux groupoïdes localement compacts avec systèmes de Haar. Alors les C^* -algèbres $C^*(G; \lambda^\bullet), C^*(H; \eta^\bullet)$ issues de ces systèmes de Haar sont fortement Morita-équivalentes.*

Corollaire 3.32. *La C^* -algèbre d'un groupoïde ne dépend du système de Haar choisi qu'à équivalence forte de Morita près.*

3.2 Calcul pseudo-différentiel sur un groupoïde

Le but de cette section est de décrire le calcul pseudo-différentiel naturellement associé à un groupoïde de Lie et de montrer comment il permet de retrouver des calculs pseudo-différentiels usuels. Ce calcul a été introduit par Connes dans le cas du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage pour développer le calcul longitudinal [10]. Il par la suite permis de retrouver le b -calcul de Melrose des variétés à bords et à coins (voir Monthubert [31]), les variétés à singularités coniques (Debord, Lescure [12]; Debord, Lescure, Nistor [15]), les variétés stratifiées (Debord, Lescure [14]), les variétés à coins fibrés (Debord, Lescure, Rochon [16])... Il a été développé en toute généralité de manière indépendante par Nistor, Weinstein, Xu dans [33] et Monthubert, Pierrot dans [32] comme familles d'opérateurs pseudo-différentiels sur les s -fibres G -invariantes. On leur préférera un point de vue plus récent, simple d'accès et naturel basé sur les distributions conormales à l'espace des unités développé par Lescure, Manchon, Vassout dans [24] et Lescure, Vassout dans [25] que nous étudieront en premier lieu. On montre ensuite comment ce point de vue permet de retrouver le calcul pseudo-différentiel usuel sur une variété et on le développe enfin sur un groupoïde de Lie quelconque. On renvoie pour les preuves aux articles [24, 25].

3.2.1 Distributions conormales

Définition 3.33. Soit M une variété, une distribution sur M est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ i.e. c'est une application linéaire $\chi: \mathcal{C}_c^\infty(M) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- Si M est compacte, il existe $k \geq 0$ tel que $\chi \in (\mathcal{C}^k(M))'$
- Si M n'est pas compacte, pour tout compact $K \subset M$ il existe $k \geq 0$ tel que $\chi \in (\mathcal{C}^k(M, K))'$ où $\mathcal{C}^k(M, K)$ désigne l'espace des fonctions \mathcal{C}^k sur M nulles sur le complémentaire de K

C'est la même définition que pour les distributions usuelles sur \mathbb{R}^n , on a comme dans \mathbb{R}^n la notion de support.

Définition 3.34. Le support d'une distribution χ est le complémentaire du plus grand ouvert U tel que si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ telle que $\text{supp}(f) \subset U$ alors $\chi(f) = 0$.

Exemple 59. Fixons une forme volume dx sur M alors $\mathcal{C}^\infty(M) \hookrightarrow (\mathcal{C}_c^\infty(M))'$ via T_\bullet où $T_f(g) = \int_M f(x)g(x) dx$.

En fait cette injection, avec la proposition suivante, permettent de donner du sens à l'appellation pour les distributions de "fonctions généralisées".

Proposition 3.35. Toute distribution est limite d'une suite (généralisée) de fonctions \mathcal{C}^∞

Définition 3.36. Le support singulier d'une distribution est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel la distribution s'écrit comme une fonction \mathcal{C}^∞ .

On repasse provisoirement dans \mathbb{R}^n . Un opérateur différentiel s'écrit comme somme finie $D = \sum_\alpha f_\alpha \partial^\alpha$, $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$. On peut utiliser la transformée de Fourier et écrire

$$Dg(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} P(x, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi$$

où

$$P(x, \xi) = \sum_\alpha f_\alpha(x) (i\xi_1)^{\alpha_1} \cdots (i\xi_n)^{\alpha_n}$$

P est appelé le symbole (total) de l'opérateur, c'est une fonction lisse en x et polynomiale en ξ . On pourrait prendre une classe plus large de symboles et garder du sens pour la définition de l'opérateur. C'est notamment utile lorsque l'on essaie d'inverser un opérateur différentiel, le symbole inverse ne sera plus polynomiale et il faut donc pouvoir donner du sens à l'opérateur.

Définition 3.37. Un symbole d'ordre m sur \mathbb{R}^n est une fonction $a: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ telle qu'on ait le développement asymptotique pour ξ grand

$$a(x, \xi) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} a_{m-k}(x, \xi)$$

où a_k est homogène d'ordre k lisse sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. On note $\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ l'espace des symboles d'ordre m .

NB. L'équivalent signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\sup_{x \in K, \|\xi\| \geq 1} \|\xi\|^{m-k-|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_k(x, \xi)| < +\infty$$

où $R_k(x, \xi) = a(x, \xi) - \sum_{j=0}^{k-1} a_{m-j}(x, \xi)$

Définition 3.38. Si a est un symbole d'ordre m , on lui associe l'opérateur pseudo-différentiel

$$P_a: f \mapsto \left(x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \right)$$

Le symbole principal est $\sigma_m(P_a) = \sigma_m(a) = a_m$.

On a $P_a: \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (mais l'opérateur n'est pas continu).

On peut écrire $P_a(f) = \lim_{R \rightarrow +\infty} P_a^R(f) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{a}_R(x, y) f(y) dy$ où

$$\hat{a}_R(x, y) = \int_{\|\xi\| \leq R} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) d\xi.$$

Ainsi, formellement $\hat{a}_R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \hat{a}$ avec $\hat{a}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) d\xi$. C'est une distribution dont le support singulier est inclus dans la diagonale $\Delta_{\mathbb{R}^n} = \{(x, x), x \in \mathbb{R}^n\}$.

Définition 3.39. Une distribution conormale à la diagonale $\delta_{\mathbb{R}^n}$ est une distribution de la forme \hat{a} .

On considère à présent un fibré vectoriel $E \rightarrow M$ et on voit $M \subset E$ via la section nulle. On veut mimer la situation précédente que l'on peut voir comme le fibré vectoriel $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on aurait d'ailleurs pu prendre des dimensions différentes et prendre un ouvert de \mathbb{R}^n pour les x .

Définition 3.40. Un symbole sur E d'ordre m est une famille de symboles d'ordre m sur $(E_x)_{x \in M}$ i.e. c'est une fonction lisse $a: E^* \rightarrow \mathbb{C}$ avec le développement asymptotique

$$a(x, \xi) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} a_{m-k}(x, \xi)$$

où a_j est lisse sur $E^* \setminus M$ homogène de degré j .

NB. Le \sim se traite en coordonnées locales où $E \rightarrow M$ devient un $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

On obtient ainsi une distribution sur E lisse en dehors de M via

$$\hat{a}: f \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{\text{rg}(E)}} \int_{E^*} a(x, \xi) \hat{f}(x, \xi) d(x, \xi)$$

où $\hat{f}(x, \xi) = \int_{E_x} e^{-i\langle u, \xi \rangle} f(x, u) du$.

Définition 3.41. Une distribution conormale sur E est une distribution de la forme \hat{a} .

On peut à présent parler de distribution conormale à une sous-variété sur une variété. On se donne une variété M et une sous-variété $V \subset M$. Soit $\varphi: N_V^M \xrightarrow{\sim} U \subset M$ un voisinage tubulaire. On prend \hat{a} une distribution conormale sur N_V^M et $\kappa \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$. On obtient alors une distribution $k_a := \varphi_*(\hat{a}) + \kappa$ sur M .

$$k_a(f) = \int_M \kappa(y) f(y) dy + \int_{(N_V^M)^*} a(x, \xi) \int_{u \in (N_V^M)_x} e^{i\langle u, \xi \rangle} f \circ \varphi(x, u) du d(x, \xi)$$

Définition 3.42. Une telle distribution est dite conormale à V sur M (on l'a ici prise à support compact, on peut enlever cette restriction enlevant l'hypothèse de support compact sur κ). De manière équivalente, une distribution sur M est conormale à V si son support singulier est inclus dans V et de la forme $\hat{a} \circ \phi$ au voisinage de V . On note $\mathcal{I}(M, V)$ l'espace de ces distributions. On note $\mathcal{I}^m(M, V)$ celles d'ordre m et $\mathcal{I}_c(M, V)$ si on rajoute l'hypothèse de support compact.

Proposition 3.43. Cette définition ne dépend pas du choix de voisinage tubulaire. Si φ_1, φ_2 sont deux choix de voisinage tubulaire et que a_1 est un symbole sur $(N_V^M)^*$ alors il existe un autre symbole a_2 tel que $\hat{a}_1 \circ \varphi_1^{-1} = \hat{a}_2 \circ \varphi_2^{-1}$ au voisinage de V . De plus \hat{a}_1 et \hat{a}_2 ont alors même symbole principal.

Définition 3.44. Avec les mêmes notations le symbole principal de k_a est $\sigma_m(k_a) = a_m$

Proposition 3.45. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_c^{m-1}(M, V) \longrightarrow \mathcal{I}_c^m(M, V) \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{C}_m^\infty((N_V^M)^* \setminus V) \longrightarrow 0$$

où \mathcal{C}_m^∞ désigne les fonctions lisses homogènes de degré m .

3.2.2 Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété

On a donné la construction des opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^n , on peut l'adapter pour les définir sur un ouvert de \mathbb{R}^n . La définition usuelle d'opérateurs pseudo-différentiels sur une variété repose sur le fait que les opérateurs pseudo-différentiels reposent sur le bon comportement des opérateurs pseudo-différentiels via les difféomorphismes. On peut alors les définir en carte locale sur des variétés et les recoller. On va en donner une construction équivalente via les distributions conormales qui va nous permettre de généraliser la construction aux groupoïdes.

Définition 3.46. Un opérateur pseudo-différentiel P sur une variété M est l'opérateur de convolution associé à une distribution conormale $\chi \in \mathcal{I}(M \times M, \Delta_M)$ i.e. si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on a

$$P(f)(x) = \chi * f(x) = \int_M \chi(x, y) f(y) dy$$

On définit le symbole principal de l'opérateur comme le symbole principal de la distribution conormale.

\triangleleft Usuellement, la convolution d'une distribution par une fonction donne une distribution $(\chi * f)(g) = \chi(f \otimes g)$. On affirme ici que la distribution obtenue si χ est conormale à la diagonale est \mathcal{C}^∞ . On verra dans le cas des groupoïdes d'où vient ce résultat.

Proposition 3.47. Soient P_1, P_2 des opérateurs pseudo-différentiels associés à des distribution conormales χ_1, χ_2 alors :

- La composition $P_1 P_2$ est opérateur pseudo-différentiel associé à $\chi_1 * \chi_2$ (qui est bien définie) et de symbole principal $\sigma(P_1 P_2) = \sigma(P_1) \sigma(P_2)$
- L'opérateur adjoint P_1^* est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal $\sigma(P_1^*) = \sigma(P_1)^*$
- Un opérateur d'ordre négatif s'étend en un opérateur continu de $L^2(M)$
- Si de plus l'ordre est strictement négatif l'opérateur est de plus compact

Corollaire 3.48. Si on note $\Psi^*(M)$ l'adhérence des opérateurs d'ordre négatif dans $\mathcal{L}(L^2(M))$ alors on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(L^2(M)) \longrightarrow \Psi^*(M) \longrightarrow \mathcal{C}^0(S^*M) \longrightarrow 0$$

où S^*M est le fibré en sphères associé à T^*M .

Remarque 3.3. On veut pouvoir étendre la définition pour des opérateurs pseudo-différentiels entre fibré vectoriels $E, F \rightarrow M$ ce qui est utile dans de nombreuses situations géométriques (opérateurs de Dirac, K-homologie...). On étend d'abord pour des fibrés triviaux en prenant des fibrés triviaux grâce à des matrices d'opérateurs pseudo-différentiels. Si $E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel alors il existe un fibré E' tel que $E \oplus E'$ est trivial. On prend alors p_E un projecteur orthogonal sur E et de même on a un projecteur p_F . Un opérateur pseudo-différentiel entre E et F est alors une matrice d'opérateurs pseudo-différentiels P telle que $P = p_F P p_E$.

3.2.3 Opérateurs pseudo-différentiels sur un groupoïde

On veut étendre la construction précédente à un groupoïde de Lie et la retrouver en prenant $M \times M \rightrightarrows M$. On veut donc définir la convolution d'une fonction par une distribution conormale aux unités et, pour pouvoir composer des opérateurs pseudo-différentiels, il faut aussi faire la convolution de deux distributions conormales.

On pose $p_i: G^{(2)} \rightarrow G$ les projections sur les deux facteurs et $m: G^{(2)} \rightarrow G$ la multiplication du groupoïde. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ on a

$$f_1 * f_2 = m_!(p_1^*(f_1) \cdot p_2^*(f_2))$$

où $p_i^*(f) = f \circ p_i$ et $m_!$ est l'intégration le long des fibres

$$m_!(f)(\gamma) = \int_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha, \beta) d\nu^2(\alpha, \beta)$$

Si on veut étendre cette idée aux distributions conormales il faut pouvoir : les tirer en arrière, les pousser en avant et les multiplier point à point.

Poussé en avant Soit $\varphi: M \rightarrow M'$ lisse, on a une application $\varphi^*: \mathcal{C}^\infty(M') \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ et donc par dualité $\varphi_*: (\mathcal{C}^\infty(M))' \rightarrow (\mathcal{C}^\infty(M'))'$ i.e.

$$\varphi_*\chi(f) = \chi(\varphi^*(f))$$

Si $V \subset M$ est une sous-variété, qu'on suppose que φ est une submersion et un difféomorphisme quand restreint à V alors si $\chi \in \mathcal{I}_c^m(M, V)$, $\phi_*(\chi) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

En effet on peut se restreindre à un voisinage de V dans M et alors voir $\varphi: M \rightarrow M' \cong V$ comme un fibré vectoriel. Soit alors $\chi = \hat{a}$ où a est un symbole sur M^* alors $\hat{a} = (\hat{a}_x)_{x \in V}$ et

$$\begin{aligned} \varphi_*(\chi)(f) &= \int_V f(x) \hat{a}_x(1) dx \\ &= \int_V f(x) a(x, 0) dx \end{aligned}$$

Donc $\varphi_*(\chi) = a(\cdot, 0)$ est \mathcal{C}^∞

Tiré en arrière Soit $p: M' \rightarrow M$ une submersion. On a l'application d'intégration le long des fibres

$$p_!: \mathcal{C}_c^\infty(M') \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(M)$$

On a une application duale sur les distributions notée $p^!$, $p^!(\chi)(f) = \chi(p_!(f))$. Dans le cas où la distribution est une fonction \mathcal{C}^∞ , $p^!$ coïncide avec le tiré en arrière usuel p^* .

On se donne en plus $V \subset M$ une sous-variété et $V' = p^{-1}(V)$ est ainsi une sous-variété (p est supposée submersive).

Proposition 3.49. Si $\chi \in \mathcal{I}_c^m(M, V)$ alors $p^!(\chi) \in \mathcal{I}_c^m(M', V')$ et via l'identification $N_{V'}^{M'} \cong p^*(N_V^M)$ on a

$$\sigma_m(p^!\chi) = \sigma_m(\chi) \circ p$$

Démonstration. Il suffit de se ramener au cas où M est un fibré vectoriel sur V et M' un fibré sur V' , pullback de M , ce qu'on fait en se plaçant au voisinage de V . \square

Produit de distributions conormales De manière générale, un produit de distributions est mal défini. Si l'une des deux distributions est une fonction \mathcal{C}^∞ le produit ponctuel est bien défini. On peut donc d'ores et déjà définir les opérateurs pseudo-différentiels sur un groupoïde.

Proposition 3.50. *Si $\chi \in \mathcal{I}_c(G, G^{(0)})$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ alors $\chi * f = m_*(p_1^!(\chi)p_2^*(f)) \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$*

NB. De même on peut définir l'opérateur de convolution à droite $f \mapsto f * \chi$, de cette manière les distributions conormales apparaissent comme des multiplicateurs de $\mathcal{C}_c^\infty(G)$

Définition 3.51. Un opérateur pseudo-différentiel sur un groupoïde G est l'opérateur de convolution (à gauche ou à droite) par une distribution conormale à $G^{(0)}$.

Lemme 3.52. *Soit M une variété, $V_1, V_2 \subset M$ des sous-variétés fermées transverses, $\chi_1 \in \mathcal{I}_c^{\ell_1}(M, V_1), \chi_2 \in \mathcal{I}_c^{\ell_2}(M, V_2)$ alors la distribution $\chi_1\chi_2$ est bien définie. Si de plus $\chi_1\chi_2$ est à support compact et $m: M \rightarrow M'$ est une submersion telle que $\forall i, m: V_i \xrightarrow{\sim} M'$ alors $m_*(\chi_1\chi_2) \in \mathcal{I}_c^{\ell_1+\ell_2}(M', m(V_1 \cap V_2))$ et sous les identifications*

$$\begin{aligned} (N_{V_1}^M)_{|_{V_1 \cap V_2}} &\cong N_{V_1 \cap V_2}^{V_2} \\ (N_{V_2}^M)_{|_{V_1 \cap V_2}} &\cong N_{V_1 \cap V_2}^{V_1} \\ N_{V_1 \cap V_2}^{V_i} &\cong N_{m(V_1 \cap V_2)}^{M'} \end{aligned}$$

alors $\sigma(m_*(\chi_1\chi_2)) = \sigma(\chi_1)\sigma(\chi_2)$

Ainsi si on se donne $\chi_1 \in \mathcal{I}_c^{\ell_1}(G, G^{(0)}), \chi_2 \in \mathcal{I}_c^{\ell_2}(G, G^{(0)})$ on prend $M = G^{(2)}$, les variétés $V_i = p_i^{-1}(G^{(0)})$ sont transverses et isomorphes à G sous $m: G^{(2)} \rightarrow G$. On pose $Q_i = p_i^!(\chi_i)$ alors par le lemme Q_1Q_2 est bien défini et donc

$$\chi_1 * \chi_2 = m_*(p_1^!(\chi_1)p_2^!(\chi_2)) \in \mathcal{I}_c^{\ell_1+\ell_2}(G, G^{(0)})$$

On peut ainsi définir la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels et

$$\sigma_{\ell_1+\ell_2}(\chi_1 * \chi_2) = \sigma_{\ell_1}(\chi_1)\sigma_{\ell_2}(\chi_2)$$

.

Définition 3.53. Si i est l'application d'inversion du groupoïde G alors l'adjoint de $\chi \in \mathcal{I}_c^m(G, G^{(0)})$ est $\chi^* = i_*(\bar{\chi}) \in \mathcal{I}_c^m(G, G^{(0)})$ et $\sigma_m(\chi^*) = \sigma_m(\chi)^*$

Proposition 3.54. *Si $\chi \in \mathcal{I}_c(G, G^{(0)})$ est d'ordre strictement négatif, il définit un élément de $C^*(G)$.*

*Si χ est d'ordre négatif $f \mapsto \chi * f$ et $f \mapsto f * \chi$ s'étendent en des applications linéaires continues sur $C^*(G)$ ainsi si on note $\Psi^*(G)$ l'adhérence dans $\mathcal{L}(C^*(G))$ de ces opérateurs on a $\Psi^*(G) \subset \mathcal{M}(C^*(G))$ et la suite exacte*

$$0 \longrightarrow C^*(G) \longrightarrow \Psi^*(G) \xrightarrow{\sigma_0} \mathcal{C}^0(S^*AG) \longrightarrow 0$$

Cette suite exacte est particulièrement utile pour définir l'indice analytique via la suite exacte longue en K -théorie, ce que nous ne feront pas ici.

4 Groupoïdes de déformation

Définition 4.1. Un groupoïde de déformation est un groupoïde de Lie de la forme

$$G_1 \times]0; 1] \sqcup G_2 \times \{0\} \rightrightarrows M \times [0; 1]$$

Ces groupoïdes ont une grande importance en géométrie non commutative, le groupoïde tangent de Connes est l'un d'entre eux et a permis à Connes de donner une preuve simple du théorème de l'indice (voir [8]) en définissant notamment l'indice analytique sans utiliser d'opérateurs pseudo-différentiels, plus généralement Debord et Skandalis ont montré dans [17] qu'un opérateur pseudo-différentiel sur un groupoïde G peut s'exprimer à l'aide d'une intégrale d'un opérateur régularisant sur le groupoïde adiabatique G_{ad} associé (qui est un groupoïde de déformation).

Si G est un groupoïde de déformation on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow C^*(G_1 \times]0; 1]) \longrightarrow C^*(G) \longrightarrow C^*(G_2) \longrightarrow 0$$

ce qui permet d'obtenir des informations sur G ou de créer des isomorphismes en K-théorie (si par exemple une des deux C^* -algèbre est contractile). On peut par exemple utiliser de tels groupoïdes pour définir sans utiliser d'opérateurs pseudo-différentiels l'indice analytique en K-théorie. Ce genre de constructions nécessite cependant des outils de K-théorie des C^* -algèbres que nous ne pouvons développer ici. Nous nous intéresseront donc aux outils géométriques pour construire de tels groupoïdes de déformation avec comme objectif la construction du groupoïde du calcul inhomogène dans la cinquième section. Les outils principaux sont les déformations au cône normal et les éclatements très utilisés en géométrie algébrique et dont nous étudieront les constructions générales ainsi que leur fonctorialité pour pouvoir ensuite les appliquer à des groupoïdes et nous assurer d'avoir des applications de structures lisses à l'arrivée. Cela nous permettra aussi de déterminer simplement les algébroïdes de ces nouveaux groupoïdes et de conserver des équivalences de Morita.

4.1 Fibré normal

On commence doucement avec un objet que nous avons déjà utilisé, le fibré normal. On en rappelle la propriété de fonctorialité :

Proposition 4.2 (Fonctorialité). *Soient M, M' des variétés, $V \subset M, V' \subset M'$ des sous-variétés immergées $f: M \rightarrow M'$ telle que $f(V) \subset V'$ et $f|_V^{V'}$ est lisse alors f induit l'application lisse*

$$\begin{aligned} N(f): N_V^M &\rightarrow N_{V'}^{M'} \\ (x, \xi) &\mapsto (f(x), df(x)(\xi)) \end{aligned}$$

De plus $N(f)$ est

- Une submersion ssi f et $f|_V^{V'}$ sont des submersions
- Une immersion ssi f est une immersion et $\forall v \in VT_v V = df(v)^{-1}(T_{f(v)} V')$

Proposition 4.3 (Transversalité). *Soient M_1, M_2, M des variétés lisses, $V_i \subset M_i, V \subset M$ des sous-variétés immergées, $f_i: M_i \rightarrow M$ des applications lisses telles que*

- i) $f_i(V_i) \subset V$
- ii) f_1, f_2 sont transverses
- iii) $f_1|_{V_1}^V, f_2|_{V_2}^V$ sont transverses

Alors $N(f_1)$ et $N(f_2)$ sont transverses et l'application naturelle

$$N_{V_1 \times_V V_2}^{M_1 \times_M M_2} \rightarrow N_{V_1}^{M_1} \times_{N_V^M} N_{V_2}^{M_2}$$

Corollaire 4.4. *Si G est un groupoïde de Lie, $H \subset G$ un sous-groupoïde de Lie. Alors $N_H^G \rightrightarrows N_{H^{(0)}}^{G^{(0)}}$ est un groupoïde de Lie pour Ns, Nr . Son algébroïde est $\mathcal{A}(N_H^G) = N_{AH}^{AG}$*

On profite de cette section un peu courte pour introduire le concept de \mathcal{VB} -groupoïde (vector bundle groupoid)

Définition 4.5. Un \mathcal{VB} -groupoïde (Ω, G, E, M) est

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & G \\ \tilde{s}, \tilde{r} \downarrow & & \downarrow s, r \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

où $\Omega \xrightarrow{\tilde{\pi}} G$ et $E \xrightarrow{\pi} M$ sont des fibrés vectoriels et $\Omega \rightrightarrows E$ et $G \rightrightarrows M$ des groupoïdes de Lie tels que les applications de structure sont des morphismes de fibrés vectoriels et la "double source" $(\tilde{\pi}, \tilde{s}): \Omega \rightarrow G \times_M E$ est une submersion surjective.

Exemple 60. *Si $G \rightrightarrows M$ est un groupoïde de Lie alors (TG, G, TM, M) est un \mathcal{VB} -groupoïde.*

Proposition 4.6. *Soit G un groupoïde de Lie, $H \subset G$ un sous-groupoïde de Lie. $(N_H^G, H, N_{H^{(0)}}^{G^{(0)}}, H^{(0)})$ est un \mathcal{VB} -groupoïde.*

De plus si $K \subset H$ est un sous-groupoïde alors $(N_{H|K}^G, K, N_{H^{(0)}|K^{(0)}}^{G^{(0)}}, K^{(0)})$ est un \mathcal{VB} -groupoïde.

On notera \mathcal{N}_H^G dans ce cas pour préciser la structure de groupoïde.

Exemple 61. *Soit G un groupoïde de Lie, $L \subset G^{(0)}$ une sous-variété. On a $N_L^G = N_L^{G^{(0)}} + \ker(ds)|_L$ d'où comme $\ker(ds) = \mathcal{A}G$,*

$$\mathcal{N}_L^G \rightrightarrows N_L^{G^{(0)}} = \{(X, Y, Z) \in N_L^{G^{(0)}} \times \mathcal{A}G \times N_L^{G^{(0)}} / Z = X + p(Y)\}$$

avec les applications

- $s(X, Y, Z) = Z$
- $r(X, Y, Z) = X$
- $(X, Y, Z) \cdot (Z, Y', Z') = (X, Y + Y', Z')$
- $u(X) = (X, 0, X)$

4.2 Déformation au cône normal

Définition 4.7. Soit M une variété, V une sous-variété immergée. La déformation au cône normal de M le long de V est

$$\text{DNC}(M, V) := M \times \mathbb{R}^* \sqcup N_V^M \times \{0\}$$

On le munit d'une structure lisse en le recouvrant par les ensembles :

- $M \times \mathbb{R}^*$
- $\phi(N_V^M) \times \mathbb{R}^* \sqcup N_V^M \times \{0\}$ où $\phi: N_V^M \rightarrow M$ est un voisinage tubulaire.

Il faut plus précisément prendre un ouvert de N_V^M contenant la section nulle pour avoir un voisinage tubulaire, prenons $\phi: U' \subset N_V^M \rightarrow U \subset M$ un difféomorphisme entre des voisinages respectifs de la section nulle et de la sous-variété V . On pose alors

$\Omega' = \{((x, \xi), \lambda) \in N_V^M \times \mathbb{R} \mid (x, \lambda\xi) \in U'\}$. La structure lisse sur $\phi(N_V^M) \times \mathbb{R}^* \sqcup N_V^M \times \{0\}$ s'obtient alors en demandant à ce que $\Phi: \Omega' \rightarrow \phi(N_V^M) \times \mathbb{R}^* \sqcup N_V^M \times \{0\}$ définie par $\Phi(x, \xi, \lambda) = (\phi(x, \lambda\xi), \lambda)$ si $\lambda \neq 0$ et $\Phi(x, \xi, 0) = (x, \xi, 0)$ sinon soit un difféomorphisme sur un ouvert de $\phi(N_V^M) \times \mathbb{R}^* \sqcup N_V^M \times \{0\}$.

La structure lisse sur $\text{DNC}(M, V)$ s'obtient donc en recollant $M \times \mathbb{R}^*$ et Ω' via Φ que l'on restreint en un difféomorphisme entre $\Omega' \cap (N_V^M \times \mathbb{R}^*)$ et $U \cap \mathbb{R}^*$.

Remarque 4.1. On peut caractériser autrement la structure lisse de $\text{DNC}(M, V)$ en disant que

$$\begin{aligned} \pi: \text{DNC}(M, V) &\rightarrow M \times \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto (x, t) \\ (x, \xi, 0) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

est lisse et si $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ s'annule sur V alors

$$\begin{aligned} f^{dnc}: \text{DNC}(M, V) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto \frac{f(x)}{t} \\ (x, \xi, 0) &\mapsto df(x)(\xi) \end{aligned}$$

est lisse. En particulier on voit via cette description que la structure lisse ne dépend pas du choix de voisinage tubulaire de V .

On a une action de \mathbb{R}^* sur $\text{DNC}(M, V)$ par

- $u \cdot (x, t) = (x, ut)$
- $u \cdot (x, \xi, 0) = (x, \frac{1}{u}\xi, 0)$

Proposition 4.8 (Fonctorialité). Soient M, M' des variétés, $V \subset M, V' \subset M'$ des sous-variétés immergées $f: M \rightarrow M'$ telle que $f(V) \subset V'$ et $f|_V^{V'}$ est lisse alors f induit l'application lisse

$$\begin{aligned} \text{DNC}(f): \text{DNC}(M, V) &\rightarrow \text{DNC}(M', V') \\ (x, t) &\mapsto (f(x), t) \\ (x, \xi, 0) &\mapsto (f(x), df(x)(\xi), 0) \end{aligned}$$

De plus $\text{DNC}(f)$ est

- Une submersion ssi f et $f|_V^{V'}$ sont des submersions
- Une immersion ssi f est une immersion et $\forall v \in VT_v V = df(v)^{-1}(T_{f(v)} V')$

Démonstration. Le caractère lisse découle directement de la caractérisation de la structure lisse donnée plus haut. Soit $U \subset \text{DNC}(M, V)$ le sous-ensemble sur lequel df est surjective (resp injective). U est un ouvert invariant par l'action de \mathbb{R}^* et contient, par hypothèse, $M \times \mathbb{R}^*$ (car $\text{DNC}(f)$ est \mathbb{R}^* -équivariant). Ainsi il suffit de montrer que $V \times \{0\} \subset U$, on aura alors un voisinage tubulaire de V et donc tout $N_V^M \times \{0\}$. L'espace tangent ici s'écrit

$$T_{(v,0)} \text{DNC}(M, V) = \mathbb{R} \oplus T_v V \oplus T_v M / T_v V \text{ et on a}$$

$$d \text{DNC}(f)(v, 0)(t, X, Y) = (t, df(v)(X), df(v)(Y))$$

Les conditions sur f permettent alors $V \times \{0\} \subset U$ et donc le résultat. \square

Proposition 4.9 (Transversalité). *Soient M_1, M_2, M des variétés lisses, $V_i \subset M_i, V \subset M$ des sous-variétés immergées, $f_i: M_i \rightarrow M$ des applications lisses telles que*

i) $f_i(V_i) \subset V$

ii) f_1, f_2 sont transverses

iii) $f_1|_{V_1}, f_2|_{V_2}$ sont transverses

Alors $\text{DNC}(f_1)$ et $\text{DNC}(f_2)$ sont transverses et l'application naturelle

$$\text{DNC}(M_1 \times_M M_2, V_1 \times_V V_2) \rightarrow \text{DNC}(M_1, V_1) \times_{\text{DNC}(M, V)} \text{DNC}(M_2, V_2)$$

est un difféomorphisme.

Démonstration. La bijectivité ensembliste de l'application est claire. La transversalité et le caractère difféomorphe se réduisent par les mêmes arguments d'action de \mathbb{R}^* que précédemment à $V_1 \times_V V_2$ où elles découlent directement de iii) \square

Corollaire 4.10. *Si G est un groupoïde de Lie, $H \subset G$ un sous-groupoïde de Lie. Alors $\text{DNC}(G, H) \rightrightarrows \text{DNC}(G^{(0)}, H^{(0)})$ est un groupoïde de Lie pour $\text{DNC}(s), \text{DNC}(r)$. Son algébroïde est $\mathcal{A}\text{DNC}(G, H) = \text{DNC}(\mathcal{A}G, \mathcal{A}H)$.*

On peut ainsi utiliser les déformations au cône normal pour construire des groupoïdes de déformation. Il suffit de les restreindre à l'intervalle $[0; 1]$.

Exemple 62 (Groupoïde tangent de Connes). *Le groupoïde tangent de Connes d'une variété M est*

$$G_M = (\text{DNC}(M \times M, M) \rightrightarrows M \times \mathbb{R})|_{M \times [0;1]}$$

dit autrement $G_M = M \times M \times]0; 1] \sqcup TM \times \{0\}$ et $(x_n, y_n, \epsilon_n) \rightarrow (x, X, 0)$ ssi $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ et $\frac{x_n - y_n}{\epsilon_n} \rightarrow X$ en carte locale. On se permettra de noter $\text{DNC}(G, H)|_{[0;1]}$ pour le genre de restrictions que l'on vient d'effectuer, on ne touchera pas à la variété.

Exemple 63 (Groupoïde adiabatique). *Le groupoïde adiabatique d'un groupoïde G est donné par l'inclusion $G^{(0)} \subset G$*

$$G_{ad} = \text{DNC}(G, G^{(0)})|_{[0;1]} = G \times]0; 1] \sqcup \mathcal{A}G \times \{0\} \rightrightarrows G^{(0)} \times [0; 1]$$

Cette construction est plus générale que la précédente que l'on retrouve en prenant le groupoïde adiabatique de $M \times M \rightrightarrows M$.

Exemple 64. *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, ce sont des groupoïdes si on les voit comme des groupes. On prend F^\perp un supplémentaire de F on a via ce choix l'isomorphisme*

$$\begin{array}{ccc} \text{DNC}(E, F) & \rightrightarrows & \text{DNC}(pt, pt) = \mathbb{R} \\ \Big\downarrow & & \\ E \times \mathbb{R} & \rightrightarrows & \mathbb{R} \end{array}$$

Plus généralement si $E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel et $F \subset E$ un sous-fibré on a

$$\begin{array}{ccc} \text{DNC}(E, F) & \xrightarrow{\cong} & \text{DNC}(M, M) = M \times \mathbb{R} \\ \Big\downarrow & & \\ E \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\cong} & M \times \mathbb{R} \end{array}$$

De plus on exprime simplement les sections via

$$\Gamma(\text{DNC}(E, F)) = \{X \in \Gamma(E \times \mathbb{R}), X|_{M \times \{0\}} \in \Gamma(F)\}$$

On peut se servir de la functorialité pour conserver les équivalences de Morita.

Proposition 4.11. *Soient G_1, G_2 des groupoïdes de Lie, H_1, H_2 des sous-groupoïdes de Lie. Supposons qu'on ait une équivalence de Morita entre G_1 et G_2 via un groupoïde Y et qu'il existe un sous-groupoïde $X \subset Y$ réalisant une équivalence de Morita entre H_1 et H_2 . Alors $\text{DNC}(Y, X)$ réalise une équivalence de Morita entre $\text{DNC}(G_1, H_1)$ et $\text{DNC}(G_2, H_2)$.*

4.3 Éclatement

Définition 4.12. Soit Y une variété et $X \subset Y$ une sous-variété. L'éclatement de X le long de Y est

$$\text{Blup}(Y, X) = (\text{DNC}(Y, X) \setminus X \times \mathbb{R}) / \mathbb{R}^*$$

L'éclatement sphérique est

$$\text{SBlup}(Y, X) = (\text{DNC}_+(Y, X) \setminus X \times \mathbb{R}_+) / \mathbb{R}_+^*$$

où $\text{DNC}_+(Y, X) = \text{DNC}(Y, X)|_{\mathbb{R}_+}$

Au niveau ensembliste :

$$\begin{aligned} \text{Blup}(Y, X) &= (Y \setminus X) \sqcup \mathbb{P}(N_X^Y) \\ \text{SBlup}(Y, X) &= (Y \setminus X) \sqcup \mathbb{S}(N_X^Y) \end{aligned}$$

i.e. on a remplacé X par l'espace total du fibré projectif ou en sphères associé à son fibré normal, l'idée est que l'on "zoome" sur la partie qu'on enlève (c'est l'idée derrière le quotient par \mathbb{R}^*), si on prend une suite de point qui converge vers un point de X via une certaine direction normale, elle va converger dans l'éclatement vers le point associé dans le fibré normal avec la direction correspondante comme élément du fibré projectif ou en sphères.

NB. On a une application naturelle $\text{SBlup}(Y, X) \rightarrow \text{Blup}(Y, X)$.

Ces constructions se basant sur la déformation au cône normal, elles sont encore functorielles. Sur les déformations au cône normal, on avait des conditions à imposer sur les fonctions qui pouvaient passer dans le foncteur, comme on utilise ici une déformation au cône normal on va retrouver les mêmes conditions mais d'autres sur $\text{DNC}(f)$ vont se rajouter. On va en effet devoir restreindre l'ensemble sur lequel la nouvelle application sera définie.

Supposons que l'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \hookrightarrow & Y' \end{array}$$

On pose $U_f = \text{DNC}(Y, X) \setminus \text{DNC}(f)^{-1}(X' \times \mathbb{R})$, c'est un ouvert de $\text{DNC}(Y, X)$. On obtient alors par quotient une application lisse

$$\text{Blup}(f): \text{Blup}_f(Y, X) := U_f /_{\mathbb{R}^*} \rightarrow \text{Blup}(Y', X')$$

Ainsi, si par exemple $X \subset Y_1 \subset Y_2$, on a une inclusion $\text{Blup}(Y_1, X) \subset \text{Blup}(Y_2, X)$, si de plus $Y_1 \subset Y_2$ est un ouvert, l'inclusion des éclatement donne aussi un ouvert et on a $\text{Blup}(Y_2, X) = \text{Blup}(Y_1, X) \cup Y_2 \setminus X$.

On a encore une forme de transversalité, supposons que $f: Y \rightarrow Y'$ est transverse à $X' \subset Y'$, on pose $X = f^{-1}(X')$, on obtient au niveau des DNC

$$\text{DNC}(Y_2, X_2) \cong \text{DNC}(Y_1, X_1) \times_{Y_1} Y_2$$

et donc en passant au quotient

$$\text{Blup}(Y_2, X_2) \cong \text{Blup}(Y_1, X_1) \times_{Y_1} Y_2$$

NB. Les mêmes résultats sont valables pour SBlup.

On peut à présent regarder l'éclatement pour les groupoïdes. Soit G un groupoïde de Lie, $H \subset G$ un sous-groupoïde (fermé). On pose

$$\begin{aligned} U_s &= \text{DNC}(G, H) \setminus \text{DNC}(r)^{-1}(H^{(0)} \times \mathbb{R}) \\ U_r &= \text{DNC}(G, H) \setminus \text{DNC}(s)^{-1}(H^{(0)} \times \mathbb{R}) \\ \widetilde{\text{DNC}}(G, H) &= U_s \cap U_r \end{aligned}$$

Ce dernier est un sous-groupoïde ouvert, c'est la restriction de $\text{DNC}(G, H)$ à l'ouvert de la base $\text{DNC}(G^{(0)}, H^{(0)}) \setminus H^{(0)} \times \mathbb{R}$. L'action $\mathbb{R}^* \curvearrowright \widetilde{\text{DNC}}(G, H)$ est libre localement propre. On obtient alors par functorialité :

Proposition 4.13. $\text{Blup}_{r,s}(G, H) := \widetilde{\text{DNC}}(G, H) /_{\mathbb{R}^*}$ et $\text{SBlup}_{r,s}(G, H) := \widetilde{\text{DNC}}_+(G, H) /_{\mathbb{R}^*_+}$ ont une structure naturelle de groupoïde. Ce sont des ouverts respectifs de $\text{Blup}(G, H)$ et $\text{SBlup}(G, H)$. Leurs algébroïdes respectives sont $\mathcal{A}\text{Blup}_{r,s}(G, H) = \text{Blup}_{r,s}(\mathcal{A}G, \mathcal{A}H)$ et $\mathcal{A}\text{SBlup}_{r,s}(G, H) = \text{SBlup}_{r,s}(\mathcal{A}G, \mathcal{A}H)$

Proposition 4.14. Soient G_1, G_2 des groupoïdes de Lie, H_1, H_2 des sous-groupoïdes de Lie. Supposons qu'on ait une équivalence de Morita entre G_1 et G_2 via un groupoïde Y et qu'il existe un sous-groupoïde $X \subset Y$ réalisant une équivalence de Morita entre H_1 et H_2 . Alors $\text{Blup}_{r,s}(Y, X)$ réalise une équivalence de Morita entre $\text{Blup}_{r,s}(G_1, H_1)$ et $\text{Blup}_{r,s}(G_2, H_2)$ et $\text{SBlup}_{r,s}(Y, X)$ réalise une équivalence de Morita entre $\text{SBlup}_{r,s}(G_1, H_1)$ et $\text{SBlup}_{r,s}(G_2, H_2)$.

Exemple 65. Si $V \subset M$ est une hypersurface ($V = \partial M$ par exemple), Melrose construit (voir [27]) le b-espace $\text{Blup}(M \times M, V \times V)$ pour développer son b-calcul, un calcul pseudo-différentiel pour les variétés à bord (et plus largement les variétés à coins). Dans son article [31], Monthubert considère le groupoïde $\text{Blup}_{r,s}(M \times M, V \times V)$ dont il montre que le calcul pseudo-différentiel naturel s'identifie au b-calcul de Melrose. Il montre aussi qu'une certaine itération de ce procédé (si on considère un groupoïde $G \rightrightarrows M$ il regarde $\text{Blup}_{r,s}(G, G_V^V)$) permet de retrouver le b-calcul des variétés à coins.

4.4 Itération des déformations au cône normal

On itère ici le procédé de déformation au cône normal en vue de l'utiliser sur les variétés filtrées que nous verrons plus tard. On se donne M une variété et V_0 une sous-variété. On commence par une remarque qui va nous être utile. On a vu qu'il y avait une action naturelle $\mathbb{R}^* \curvearrowright \text{DNC}(M, V_0)$, si de plus G est un groupe de Lie agissant sur M et laissant V_0 invariant alors $G \curvearrowright \text{DNC}(M, V_0)$ et l'action commute à celle de \mathbb{R}^* ce qui nous donne $G \times \mathbb{R}^* \curvearrowright \text{DNC}(M, V_0)$. On va ici itérer les déformations au cône normal en nous donnant une sous-variété à chaque étape, on aura ainsi une action de \mathbb{R}^* à chaque étape et donc une action de $(\mathbb{R}^*)^k$ à la k -ième étape. $\text{DNC}(M, V_0)$ est muni d'une action $\lambda^{(0)}$ de \mathbb{R}^* et d'une projection $\pi_{\mathbb{R}}$ sur \mathbb{R} . On commence avec une première itération.

Définition 4.15. Si $V_1 \subset \text{DNC}(M, V_0)$ est une sous-variété, on définit

$$\text{DNC}^2(M, V_0, V_1) := \text{DNC}(\text{DNC}(M, V_0), V_1)$$

et on note $\lambda^{(1)}$ l'action de \mathbb{R}^* et $\pi_{\mathbb{R}}^{(1)}$ la projection sur \mathbb{R} .

Si V_1 est \mathbb{R}^* -invariant, $\lambda^{(0)}$ passe à la déformation au cône normal et on a deux actions de \mathbb{R}^* qui commutent donc $(\mathbb{R}^*)^2$ agit sur $\text{DNC}^2(M, V_0, V_1)$ via $\lambda^{(0)} \times \lambda^{(1)}$. Si $\pi_{\mathbb{R}}(V_1) \subset \mathbb{R}$ est un sous-espace affine et que l'application restreinte à V_1 et co-restreinte à son image est une submersion alors

$$\pi_{\mathbb{R}}^{(0,1)} := \text{DNC}(\pi_{\mathbb{R}}) : \text{DNC}^2(M, V_0, V_1) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

est une submersion lisse où on a identifié $\mathbb{R}^2 \cong \text{DNC}(\mathbb{R}, \pi_{\mathbb{R}}^{(0)}(V_1))$ via le choix d'un supplémentaire.

Si on combine les deux hypothèses on écrit $\pi_{\mathbb{R}}^{(0,1)} = (\pi_{\mathbb{R}}^{(0)}, \pi_{\mathbb{R}}^{(1)})$ on a

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{R}}^{(0,1)} \circ \lambda_u^{(1)} &= \left(\frac{\pi_{\mathbb{R}}^{(0)}}{u}, u\pi_{\mathbb{R}}^{(1)} \right) \\ \pi_{\mathbb{R}}^{(0,1)} \circ \lambda_u^{(0)} &= (u\pi_{\mathbb{R}}^{(0)}, \pi_{\mathbb{R}}^{(1)}) \end{aligned}$$

Définition 4.16. Etant donnée une suite de sous-variétés

$V_0 \subset M, V_1 \subset \text{DNC}(M, V_0), \dots, V_k \subset \text{DNC}^k(M, V_0, \dots, V_{k-1})$ on construit par récurrence

$$\text{DNC}^{k+1}(M, V_0, \dots, V_k) := \text{DNC}(\text{DNC}^k(M, V_0, \dots, V_{k-1}), V_k)$$

Si $\forall 1 \leq i \leq k, \pi_{\mathbb{R}}^{(0, \dots, i-1)}(V_i)$ est un sous-espace affine de \mathbb{R}^i et que la restriction est une submersion sur son image alors

$$\pi_{\mathbb{R}}^{(0, \dots, k)} := \text{DNC}(\pi_{\mathbb{R}}^{(0, \dots, k-1)}) : \text{DNC}^{k+1}(M, V_0, \dots, V_k) \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$$

est une submersion.

Si chaque V_i est $(\mathbb{R}^*)^i$ -invariant alors $\text{DNC}^{k+1}(M, V_0, \dots, V_k)$ est muni de $k+1$ actions de \mathbb{R}^* commutant deux à deux $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(k)}$.

On garde encore la functorialité en itérant les DNC et on en déduit ainsi l'analogie de la construction pour les groupoïdes :

Proposition 4.17. Si G est un groupoïde de Lie et qu'on se donne une suite de sous-groupoïdes de Lie $H_0 \subset G, \dots, H_k \subset \text{DNC}^k(G, H_0, \dots, H_{k-1})$ alors

$$\text{DNC}^{k+1}(G, H_0, \dots, H_k) \rightrightarrows \text{DNC}(G^{(0)}, H_0^{(0)}, \dots, H_k^{(0)})$$

est un groupoïde de Lie d'algébroïde $\text{DNC}(\mathcal{A}G, \mathcal{A}H_0, \dots, \mathcal{A}H_k)$.

5 Variétés de Heisenberg, de Carnot, calcul pseudo-différentiel inhomogène

En 1974, Folland et Stein étudient l'opérateur laplacien de Kohn \square_b sur les variétés *CR* (Cauchy-Riemann), il apparaît comme le laplacien associé à l'opérateur $\bar{\partial}_b$. Si V est une variété complexe et $M \subset V$ une hypersurface réelle, l'opérateur $\bar{\partial}$ induit l'opérateur $\bar{\partial}_b$ sur M et un complexe de chaînes naturel sur les formes différentielles (il existe une notion plus générale et abstraite de variété *CR* et du $\bar{\partial}_b$ -complexe associé mais nous ne rentrerons pas dans ces considérations). Le but de Folland et Stein était de calculer des termes de parametrix pour \square_b pour en déduire certaines estimations, l'opérateur \square_b étant rarement elliptique, les techniques introduites jusque là se révèlent inefficaces et ils introduisent donc un nouveau calcul pseudo-différentiel.

Lorsque l'on étudie, par exemple, les opérateurs de type laplacien $\sum_{i,j} a_{i,j}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$ une technique

consiste à regarder le comparer localement au même opérateur dont on a figé les coefficients ($\sum_{i,j} a_{i,j}(x_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$ sur T_{x_0}), on approxime donc notre espace par l'espace tangent en un point

et on se ramène ainsi à des problèmes d'analyse harmonique sur \mathbb{R}^n . Cette approche ne marche cependant pas dans le cas hypoelliptique non elliptique et Hörmander montre dans [23] l'importance de prendre en compte les commutateurs de champs de vecteurs (vu comme des opérateurs différentiels d'ordre 1). L'idée est alors de prendre en compte suffisamment de relations en compte entre ces champs de vecteurs pour qu'ils engendrent une algèbre de Lie nilpotente. On approxime alors notre espace par un groupe de Lie nilpotent sur lequel on peut faire de l'analyse harmonique (sous certaines conditions d'homogénéité). C'est cette approche que suivent Folland et Stein et elle se généralise à toutes les variétés munies d'une filtration $0 = H^0 \subset H^1 \subset \dots \subset H^k = TM$ du fibré tangent vérifiant certaines conditions de commutation des champs de vecteurs (appelées variété de Carnot ou variétés filtrées). Cette approche est détaillée par Beals et Greiner dans [3] dans le cas d'un seul sous-fibré $H \subset TM$ de codimension 1 : l'idée est localement, de se ramener à \mathbb{R}^{d+1} , de prendre une base du fibré tangent X_0, \dots, X_d telle que X_1, \dots, X_d soient des sections de H . On a alors une famille à un paramètre de dilatations inhomogènes

$$\lambda \cdot (\sigma_0, \sigma') = (\lambda^2 \sigma_0, \lambda \sigma')$$

On peut alors décrire l'espace des symboles via un développement asymptotique similaire à celui de 3.37 mais cette fois ci, on demande à ce que les fonctions soient homogènes relativement à cette \mathbb{R}^* -action inhomogène. Ainsi le co-symbole principal est à valeurs dans un fibré en groupes de Heisenberg (nous en décriront la structure dans le cas général ci-dessous). Dans ce calcul pseudo-différentiel, un champ de vecteurs à valeurs dans H^i est un opérateur d'ordre i (ce sera clair quand on aura décrit l'action de \mathbb{R}^* par dilatations inhomogènes dans le cas général)

Pour mieux comprendre les problèmes d'indice associé à ce calcul pseudo-différentiel et toujours dans l'esprit de [17], ce calcul inhomogène devrait se retrouver en construisant un groupoïde de déformation entre le groupoïde des paires $M \times M \rightrightarrows M$ pour $t \neq 0$ et le réceptacle des symboles : le fibré en groupes de Lie nilpotent associé à la filtration. Cette approche a déjà été utilisée dans le cas des variétés de contact par Van-Erp dans [36] où il donne un théorème de l'indice pour les opérateurs elliptiques sur les variétés de contact. Une première construction du groupoïde dans le cas général se retrouve de manière indépendante chez Van-Erp, Yunken [37] et Choi, Ponge [6, 5, 7], ces constructions reposent cependant sur des outils élaborés propres aux variétés de Carnot (coordonnées de Carnot, dérivée de Pansu) dans le cas de Choi, Ponge et dans le cas de Van-Erp, Yunken, sur l'intégration d'une algébroïde de Lie (obtenue par recollement des deux algébroïdes voulues) ce qui n'éclaire pas vraiment la structure géométrique du groupoïde de déformation. On propose, après une présentation des variétés de Carnot et de leur fibré en groupes de Lie nilpotents d'expliquer la construction de Mohsen dans [30] du groupoïde de Choi, Ponge, Van-Erp, Yunken.

5.1 Variété de Carnot, filtration et fibré en groupes de Lie nilpotents

Définition 5.1. Une variété de Carnot est la donnée d'une variété M et d'une filtration du fibré tangent $0 = H^0 \subset H^1 \subset \dots \subset H^{k+1} = TM$ telle que

$$\forall i, j, [\Gamma(H^i), \Gamma(H^j)] \subset \Gamma(H^{i+j})$$

où $H^i = TM$ si $i > k$.

De par la condition sur les sections des sous-fibrés, si $X \in \Gamma\left(\frac{H^i}{H^{i-1}}\right), Y \in \Gamma\left(\frac{H^j}{H^{j-1}}\right)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y \equiv f[X, Y] \pmod{\Gamma(H^{i+j-1})}$$

ainsi on a défini une application $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilinéaire

$$\Gamma\left(\frac{H^i}{H^{i-1}}\right) \times \Gamma\left(\frac{H^j}{H^{j-1}}\right) \rightarrow \Gamma\left(\frac{H^{i+j}}{H^{i+j-1}}\right)$$

Définition 5.2. Cette application provient d'une application bilinéaire antisymétrique

$$\mathcal{L}: \frac{H^i}{H^{i-1}} \times \frac{H^j}{H^{j-1}} \rightarrow \frac{H^{i+j}}{H^{i+j-1}}$$

appelée forme de Levi.

Via cette forme, on obtient pour tout $a \in M$ une structure naturelle d'algèbre de Lie sur $G(H)_a = \bigoplus_i \frac{H_a^i}{H_a^{i-1}}$ avec $[X, Y] := \mathcal{L}(X, Y)$.

Via la formule de Baker-Campbell-Hausdorff on obtient une structure de groupe de Lie nilpotent sur $G(H)_a$ pour tout $a \in M$ (i.e. XY est l'unique élément tel que $e^X e^Y = e^{XY}$). Cette structure dépend de manière \mathcal{C}^∞ du point a on obtient donc un fibré en groupes de Lie nilpotents $G(H) \rightarrow M$.

On peut munir l'algèbre de Lie $G(H)_a, a \in M$ et donc le groupe de Lie d'une action anisotrope de \mathbb{R}^* , on pose

$$t \cdot X = t^i X, X \in \frac{H_a^i}{H_a^{i-1}}$$

et on l'étend par linéarité. La condition sur les crochets de Lie nous donne alors que c'est un automorphisme d'algèbre de Lie. On l'étend ainsi, via l'exponentielle, en un automorphisme de groupe de Lie δ_t et puisque l'exponentielle associée à la loi de groupe est l'identité de $G(H)_a$ (on observe au passage que le neutre est 0 et $X^{-1} = -X$), on a la même formule pour δ_t .

NB. Cette action permet de comprendre, avec ce qui a été dit précédemment, en quoi les sections de H^i sont des opérateurs d'ordre i .

Exemple 66. Si M est une variété de contact, la filtration donnée par $0 \subset H \subset TM$ où H est la structure de contact fait de M une variété de Carnot. Plus généralement une variété de Heisenberg, c'est à dire une variété M munie d'un sous-fibré en hyperplans $H \subset TM$, est une variété de Carnot (on n'a pas besoin de la condition supplémentaire sur les variétés de contact).

Exemple 67. Une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) est une variété de Carnot pour la filtration $0 \subset \mathcal{F} \subset TM$. Elle est caractérisée par le fait que la forme de Levi est nulle

Exemple 68. Les variétés CR telles que décrites (hypersurfaces réelles de variétés complexes), on se donne $M \subset V$ une hypersurface réelle d'une variété complexe, on pose L le sous-fibré de $T^{(1,0)}V|_M$ tangent à M . Si on note $n = \dim_{\mathbb{C}}(V)$ alors L est un fibré vectoriel réel de rang $n - 1$ sur M et $[L, L] \subset L$ par intégrabilité, ainsi $0 \subset L \subset TM$ est une filtration de Carnot et M une variété de Carnot

Exemple 69. On part d'une variété M et d'un sous-fibré $H \subset TM$ on pose alors

$$\begin{cases} H^1 = H \\ H^{j+1} = H^j + [H, H^j], j \geq 1 \end{cases}$$

Si pour tout $x \in M$ il existe $r \geq 1$ tel que $H_x^r = T_x M$ on dit que M est une variété de Carnot-Carathéodory. Si de plus on suppose que le rang de chaque $H^j, 1 \leq j \leq r - 1$ est localement constant on parle de variété de Carnot-Carathéodory équirégulière (en particulier le r ne dépend pas de $x \in M$). Une variété de Carnot-Carathéodory équirégulière est une variété de Carnot pour la filtration $(H^j)_j$.

Les variétés de Carnot-Carathéodory apparaissent naturellement en géométrie sous-riemannienne, en théorie du contrôle et possèdent de nombreuses applications concrètes, voir [4, 21].

5.2 Cas d'un seul sous-fibré et déformations au cône normal avec poids

On va d'abord étudier le cas d'un seul sous-fibré $H \subset TM$ ce qui nous conduira à la notion de déformation au cône normal avec poids introduite par Mohsen dans [30].

Lemme 5.3. Soit G un groupoïde de Lie, $H \subset G$ un sous-groupoïde de Lie qui est un fibré en groupes de Lie connexes tel que

$$\forall h \in H, (dr - ds)(T_h G) \subset T_{s(h)} H^{(0)} \quad (*)$$

alors

- i) Le groupoïde \mathcal{N}_H^G est un fibré en groupes de Lie
- ii) Le groupoïde $\mathcal{N}_{H|H^{(0)}}^G$ (le noyau du \mathcal{VB} -groupoïde $\mathcal{N}_H^G \rightarrow H$) est un fibré en groupes de Lie abéliens isomorphe à $\mathcal{A}G/\mathcal{A}H \times_{H^{(0)}} N_{H^{(0)}}^{G^{(0)}}$
- iii) On a une suite exacte de groupoïdes de Lie sur $N_{H^{(0)}}^{G^{(0)}}$ dont la fibre en (x_0, X_0) est

$$1 \longrightarrow \mathcal{A}G_{x_0}/\mathcal{A}H_{x_0} \longrightarrow \left(\mathcal{N}_H^G \right)_{(x_0, X_0)} \longrightarrow H_{x_0} \longrightarrow 1$$

De plus, l'action $\mathcal{A}H_{x_0} \curvearrowright \mathcal{A}G_{x_0}/\mathcal{A}H_{x_0}$ relative à cette suite exacte s'écrit de la manière suivante : si $X, Y \in \Gamma(\mathcal{A}G)$ tels que $X|_{H^{(0)}} \in \Gamma(\mathcal{A}H)$ alors par hypothèse

$$[X, Y](x_0) \quad \text{mod } \mathcal{A}H_{x_0}$$

ne dépend que de $X(x_0) \in \mathcal{A}H_{x_0}$ et de $Y(x_0) \text{ mod } \mathcal{A}H_{x_0} \in \mathcal{A}G_{x_0}/\mathcal{A}H_{x_0}$, c'est l'action de $X(x_0)$ sur $Y(x_0) \text{ mod } \mathcal{A}H_{x_0}$. En particulier la suite exacte est centrale si et seulement si cette action est triviale.

Démonstration. La condition $(*)$ se réécrit en $Ns = Nr$, ces application sont la source et le but de \mathcal{N}_H^G qui est donc un fibré en groupes de Lie, d'où le point i).

On utilise le fait que si $X \subset Y \subset Z$ est une inclusion de variétés, on a $N_{Y|X}^Z \cong N_X^Z/N_X^Y$. Ainsi, $\mathcal{N}_{H|H^{(0)}}^G$ est l'image de $N_{H^{(0)}}^G$ par un morphisme de groupoïdes et on a (voir l'exemple 61)

$$N_{H^{(0)}}^G = \left\{ (X, Y, Z) / X, Z \in N_{H^{(0)}}^{G^{(0)}}, Y \in \mathcal{A}G/\mathcal{A}H, Z = X + p(Y) \right\}$$

où p est l'ancre de N_H^G . Mais cette application est par hypothèse $(*)$ nulle et $N_{H^{(0)}}^G$ est un fibré en groupes de Lie abéliens donc de même pour $\mathcal{N}_{H|H^{(0)}}^G$, ce dernier étant naturellement isomorphe

au pullback $\mathcal{AG}/\mathcal{AH} \times_{H^{(0)}} \mathcal{N}_{H^{(0)}}^{G^{(0)}}$ et on obtient *ii*).

L'exactitude en $\mathcal{AG}_{x_0}/\mathcal{AH}_{x_0}$ découle directement du fait que $\mathcal{N}_{H|H^{(0)}}^G \subset \mathcal{N}_H^G$ est un sous-groupeïde. L'exactitude en $(\mathcal{N}_H^G)_{(x_0, X_0)}$ est par définition du fibré normal. L'exactitude en H_{x_0} provient du fait que $s: G \rightarrow G^{(0)}$ est une submersion.

Il reste enfin à montrer la dernière affirmation : on prend $X, Y \in \Gamma(\mathcal{AG})$ tel que $X|_{H^{(0)}} \in \Gamma(\mathcal{AH})$. On raisonne en plusieurs temps

- Si $Y(x_0) = 0$ on peut faire un développement limité et écrire Y comme somme de fZ où $f(x_0) = 0$, or $[X, fZ](x_0) = f(x_0)[X, Z](x_0) + df(x_0)(p(X(x_0)))Z(x_0) = 0$ car H est un fibré en groupes de Lie donc son ancre est nulle. Ainsi $[X, Y](x_0)$ ne dépend que de X et $Y(x_0)$
- Si $Y(x_0) \in \mathcal{AH}_{x_0}$, on peut par le cas précédent supposer que $Y|_{H^{(0)}} \in \Gamma(\mathcal{AH})$ or, comme \mathcal{AH} est stable par crochet, $[X, Y](x_0) \in \mathcal{AH}_{x_0}$. Ainsi $[X, Y](x_0) \bmod \mathcal{AH}_{x_0}$ ne dépend que de X et $Y(x_0) \bmod \mathcal{AH}_{x_0}$.
- Si $X(x_0) = 0$ on a une application $dX(x_0): T_{x_0}G^{(0)} \rightarrow \mathcal{AG}_{x_0}$ et elle vérifie $[X, Y](x_0) = -dX(x_0)(p(Y(x_0)))$ (on le montre en écrivant X comme somme de fZ avec $f(x_0) = 0$). On a $X|_{H^{(0)}} \in \Gamma(\mathcal{AH})$ donc $dX(x_0)(T_{x_0}H^{(0)}) \subset \mathcal{AH}_{x_0}$ et la condition (*) donne que l'ancre $p(Y(x_0)) \in T_{x_0}H$ et donc $[X, Y](x_0) \in \mathcal{AH}_{x_0}$.

□

Ce lemme, notamment la suite exacte, va nous permettre d'identifier la loi de groupe dans le théorème suivant, on ne regarde pour l'instant le cas que d'un seul sous fibré $0 \subset H \subset TM$. On peut voir $H \subset \mathcal{N}_M^{M \times M}$.

Théorème 5.4 (Mohsen). *Le groupeïde $\mathcal{N}_{H \times \{0\}}^{\text{DNC}(M \times M, M)} \rightrightarrows \mathcal{N}_{M \times \{0\}}^{M \times \mathbb{R}} = M \times \mathbb{R}$ est isomorphe sur l'identité au fibré en groupes de Lie $H \oplus TM/H \times \mathbb{R} \rightrightarrows M \times \mathbb{R}$, la loi de groupe sur ce dernier étant donné par*

$$(h, n, t) \cdot (h', n', t) = (h + h', n + n' + \frac{t}{2}\mathcal{L}(h, h'), t)$$

Démonstration. On veut appliquer le lemme précédent avec $\text{DNC}(M \times M, M) \rightrightarrows M \times \mathbb{R}$ et le sous-groupeïde $H \times \{0\} \rightrightarrows M \times \{0\}$, la condition (*) est évidemment vérifiée car $\pi_{\mathbb{R}} \circ r = \pi_{\mathbb{R}} \circ s$ et de même on vérifie la triviale de l'action $H_{x_0} \curvearrowright T_{x_0}M/H_{x_0}$. Pour $(x_0, t_0) \in \mathcal{N}_{M \times \{0\}}^{M \times \mathbb{R}} = M \times \mathbb{R}$ on a la suite exacte de groupes de Lie du lemme

$$1 \longrightarrow T_{x_0}M/H_{x_0} \longrightarrow (\mathcal{N}_{H \times \{0\}}^{\text{DNC}(M \times M, M)})_{(x_0, t_0)} \longrightarrow H_{x_0} \longrightarrow 1$$

Cette suite exacte est scindée et puisqu'elle est centrale on pourra en déterminer le produit sur $(\mathcal{N}_{H \times \{0\}}^{\text{DNC}(M \times M, M)})_{(x_0, t_0)}$. Pour cela, on prend $h \in H_{x_0}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ telle que $f'(0) = h$ et $\forall t f'(t) \in H_{f(t)}$. On pose alors

$$\begin{aligned} \sigma_{x_0, t_0}(h, \cdot): \mathbb{R} &\rightarrow \text{DNC}(M \times M, M) \\ u \neq 0 &\mapsto (f(tu), f(0), tu) \\ 0 &\mapsto (x_0, h, 0) \end{aligned}$$

Ainsi l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{x_0, t_0}: H_{x_0} &\rightarrow (\mathcal{N}_{H \times \{0\}}^{\text{DNC}(M \times M, M)})_{(x_0, t_0)} \\ h &\mapsto \left(\frac{\partial}{\partial u|_{u=0}} \sigma_{x_0, t_0}(h, u) \bmod T_{(x_0, h, 0)}(H \times \{0\}) \right) \end{aligned}$$

est bien définie, ne dépend pas du choix de f et est une section de la suite exacte. Ce n'est cependant pas un morphisme de groupes et un analogue de la formule $\exp(tX) \exp(tY) \exp(-t(X+Y)) \sim_{t \rightarrow 0} \exp(\frac{t^2}{2}[X, Y])$ donne la formule

$$\forall h_1, h_2 \in H_{x_0}, \mathfrak{S}_{x_0, t_0}(h_1) \mathfrak{S}_{x_0, t_0}(h_2) \mathfrak{S}_{x_0, t_0}(-h_1 - h_2) = \frac{t_0}{2} \mathcal{L}(h_1, h_2)$$

on obtient alors le produit sur $(\mathcal{N}_{H \times \{0\}}^{\text{DNC}(M \times M, M)})_{(x_0, t_0)}$. \square

Corollaire 5.5. *La fibre de $\text{DNC}^2(M \times M, M, H \times \{0\}) \rightrightarrows M \times \mathbb{R}^2$ sur $M \times \{1\} \times \mathbb{R}$ est égale, algébriquement, à*

$$M \times M \times \mathbb{R}^* \sqcup H \oplus TM/H \times \{0\} \rightrightarrows M \times \mathbb{R}$$

où la structure de groupoïde sur $M \times M \times \mathbb{R}^*$ est celle des paires et celle sur $H \oplus TM/H \times \{0\}$ est celle de groupe de Lie nilpotent

$$(h, n) \cdot (h', n') = \left(h + h', n + n' + \frac{1}{2} \mathcal{L}(h, h') \right)$$

On a ainsi le groupoïde de déformation voulu pour le calcul inhomogène. On va modifier la déformation au cone normal pour plus facilement itérer ce processus et en déduire le groupoïde de déformation pour une variété de Carnot quelconque. Notons au passage que puisque H est \mathbb{R}^* invariant, on a les \mathbb{R}^* -actions λ^0, λ^1 , elles s'expriment de la manière suivante :

$$\lambda_s^0(h, n, t) = (h, \frac{n}{s}, ts); \lambda_s^1(h, n, t) = (\frac{h}{s}, \frac{n}{s}, \frac{t}{s})$$

Ainsi si on regarde l'action diagonale on a

$$s \cdot (h, n, t) = (\frac{h}{s}, \frac{n}{s^2}, t)$$

la fibre au dessus de $t = 1$ est donc bien \mathbb{R}^* -invariante et on retrouve l'action anisotrope décrite précédemment (en prenant $\lambda_{1/s}$).

On prend maintenant un cas plus général, soit M une variété, $V \subset M$ une sous-variété, $H \subset N_V^M$ un sous-fibré. On note \mathcal{H} le relevé de H à TM i.e. $TV \subset \mathcal{H} \subset TM|_V$ et $H = \mathcal{H}/TV$. On veut donner plus de sens à la fibre $(\pi^{(0,1)})^{-1}(\{1\} \times \mathbb{R})$ de $\text{DNC}^2(M, V, H \times \{0\})$ que l'on a vu apparaître comme groupoïde de déformation du calcul inhomogène.

On rappelle que N_V^M s'obtient comme l'ensemble des fonctions lisses $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ telles que $f(0) \in V$ quotienté par la relation $f \sim g$ ssi $f(0) = g(0)$ et $f'(0) - g'(0) \in T_{f(0)}V$. On va adapter cette construction en présence du fibré H .

Définition 5.6. Soit $\tilde{N}_{V, H}^M$ l'ensemble des fonctions lisses $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ telles que $f(0) \in V$ et $f'(0) \in \mathcal{H}_{f(0)}$. On pose alors $N_{V, H}^M$ le quotient de $\tilde{N}_{V, H}^M$ par la relation d'équivalence où $f \sim g$ ssi

- $f(0) = g(0)$
- $f'(0) - g'(0) \in T_{f(0)}V$
- pour toute fonction lisse $l: M \rightarrow \mathbb{R}$ nulle sur V et telle que dl soit nulle sur \mathcal{H} alors $(l \circ f)''(0) = (l \circ g)''(0)$

Bien que la définition soit calquée sur celle du fibré normal, $N_{V, H}^M$ n'est pas un fibré vectoriel.

Si on note $\pi_{\mathbb{R}}: \text{DNC}(M, V) \rightarrow \mathbb{R}$ la projection, $\pi_{\mathbb{R}}(H) = 0$ donc on a une application $N\pi_{\mathbb{R}}: N_H^{\text{DNC}(M, V)} \rightarrow N_0^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Soit $f \in \tilde{N}_{V, H}^M$, puisque $f(0) \in V$, elle induit une application $\text{DNC}(f): \mathbb{R} \rightarrow \text{DNC}(M, V)$ or $f'(0) \in H$, on a une classe $[\text{DNC}(f)] \in N_H^{\text{DNC}(M, V)}$ (donnée par $\text{DNC}^2(f)(0)$) qui est dans $(N\pi_{\mathbb{R}})^{-1}(1)$.

Proposition 5.7. *L'application précédemment décrite*

$$\begin{aligned} \beta: N_{V, H}^M &\rightarrow (N\pi_{\mathbb{R}})^{-1}(1) \\ [f] &\mapsto [\text{DNC}(f)] = \text{DNC}^2(f)(0) \end{aligned}$$

est une bijection.

Démonstration. Si on se donne deux fonctions $f, g \in \tilde{N}_{V, H}^M$, elles définissent des fonctions $\text{DNC}(f), \text{DNC}(g)$ dont les classes dans le fibré normal $N_H^{\text{DNC}(M, V)}$ sont les mêmes si et seulement si $f \sim g$ on obtient donc que β est injective. La surjectivité s'observe immédiatement si on se donne des coordonnées locales pour les déformations au cône normal. Soit $\varphi: N_V^M \rightarrow M$ un plongement de voisinage tubulaire, $L: H \oplus N_V^M / H \rightarrow N_V^M$ un isomorphisme de fibré donné par un choix de fibré supplémentaire. Si on pose $\phi = \varphi \circ L$, on sait alors qu'on a la carte locale pour $\text{DNC}(M, V)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}: H \oplus N_V^M / H \times \mathbb{R} &\rightarrow \text{DNC}(M, V) \\ (h, n, t) &\mapsto (\phi(th, tn), t) \quad t \neq 0 \\ (h, n, 0) &\mapsto (L(h, n), 0) \end{aligned}$$

et ainsi par le même procédé une carte locale pour $\text{DNC}^2(M, V, H \times \{0\})$ via

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}: H \oplus N_V^M / H \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \text{DNC}^2(M, V, H \times \{0\}) \\ (h, n, t, u) &\mapsto (\phi(uth, u^2tn), ut, u) \in M \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \quad t \neq 0, u \neq 0 \\ (h, n, 0, u) &\mapsto (L(h, un), 0, u) \in N_V^M \times \{0\} \times \mathbb{R}^* \quad u \neq 0 \\ (h, n, t, 0) &\mapsto (h, n, t, 0) \in N_H^{\text{DNC}(M, V)} \times \{0\} \end{aligned}$$

l'identification entre $N_H^{\text{DNC}(M, V)}$ et $H \oplus N_V^M / H \oplus \mathbb{R}$ de la dernière ligne étant faite via $\tilde{\phi}$. \square

La projection $\pi^{(0,1)}$ est alors très simple dans ces coordonnées, il s'agit naturellement de $(h, n, t, u) \mapsto (t, u)$.

Définition 5.8. La déformation au cône normal de M le long de V avec poids H est l'ensemble

$$\text{DNC}_H(M, V) := M \times \mathbb{R}^* \sqcup N_{V, H}^M \times \{0\}$$

dont la structure lisse est donnée par l'identification $\text{DNC}_H(M, V) \cong (\pi^{(0,1)})^{-1}(\{1\} \times \mathbb{R})$ via l'application β .

On a ainsi une carte locale de $\text{DNC}_H(M, V)$ via

$$\begin{aligned} H \oplus N_V^M / H \times \mathbb{R} &\rightarrow \text{DNC}_H(M, V) \\ (h, n, u) &\mapsto (\phi(uh, u^2n), u) \quad u \neq 0 \\ (h, n, 0) &\mapsto ([t \mapsto \phi(th, t^2n)], 0) \end{aligned}$$

Notons que les autres fibres $(\pi^{(0,1)})^{-1}(\{t\} \times \mathbb{R})$ sont toutes isomorphes à $(\pi^{(0,1)})^{-1}(\{1\} \times \mathbb{R})$ via un changement d'échelle en la variable u , $\text{DNC}^2(M, V, H \times \{0\})$ apparaît ainsi comme une déformation de $\text{DNC}_H(M, V)$ vers $\text{DNC}(N_V^M, H)$.

Proposition 5.9 (Fonctorialité). *Soient M, M' des variétés, $V \subset M, V' \subset M'$ des sous-variétés, $H \subset N_V^M, H' \subset N_{V'}^{M'}$ des sous-fibrés et $f: M \rightarrow M'$ une application lisse telle que $f(V) \subset V'$ et $df(H) \subset H'$ alors elle induit les applications lisses*

$$\begin{aligned} N(f): N_{V,H}^M &\rightarrow N_{V',H'}^{M'} \\ [g] &\mapsto [f \circ g] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DNC}(f): \text{DNC}_H(M, V) &\rightarrow \text{DNC}_{H'}(M', V') \\ (x, t) &\mapsto (f(x), t) \\ ([g], 0) &\mapsto ([f \circ g], 0) \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la fonctorialité pour les DNC itérées (2 fois en l'occurrence) et identifier les $(\pi^{(0,1)})^{-1}(\{1\} \times \mathbb{R})$ via $\text{DNC}^2(f)$. \square

Proposition 5.10 (Transversalité). *Soient M_1, M_2, M des variétés, $V_i \subset M_i, V \subset M$ des sous-variétés et $H_i \subset N_{V_i}^{M_i}, H \subset N_V^M$ des sous-fibrés, on se donne des applications lisses $f_i: M_i \rightarrow M$ vérifiant*

- $f_i(V_i) \subset V$
- les f_i sont transverses
- les $f_i|_{V_i}^V$ sont transverses
- $H = df_1(H_1) + df_2(H_2)$

Alors les applications $\text{DNC}(f_i): \text{DNC}_{H_i}(M_i, V_i) \rightarrow \text{DNC}_H(M, V)$ sont transverses et l'application naturelle

$$\text{DNC}_{H_1 \times_H H_2}(M_1 \times_M M_2, V_1 \times_V V_2) \rightarrow \text{DNC}_{H_1}(M_1, V_1) \times_{\text{DNC}_H(M, V)} \text{DNC}_{H_2}(M_2, V_2)$$

est un difféomorphisme.

Démonstration. Là encore il suffit d'appliquer la transversalité pour le DNC double et d'identifier les $(\pi^{(0,1)})^{-1}(\{1\} \times \mathbb{R})$. \square

Corollaire 5.11. *Si G est un groupoïde de Lie, $G' \subset G$ un sous-groupoïde de Lie, $H \subset N_{G'}^G$ un \mathcal{VB} -sous-groupoïde. Alors*

- $\mathcal{N}_{G',H}^G \rightrightarrows N_{G^{(0)},H^{(0)}}^{G^{(0)}}$ est un groupoïde de Lie d'algébroïde $N_{AG',AH}^{AG}$
- $\text{DNC}_H(G, G') \rightrightarrows \text{DNC}_{H^{(0)}}(G^{(0)}, G'^{(0)})$ est un groupoïde de Lie d'algébroïde $\text{DNC}_{AH}(AG, AG')$

5.3 Le groupoïde du calcul inhomogène

On se donne M une variété de Carnot pour la filtration $0 = H^0 \subset H^1 \subset \dots \subset H^{k+1} = TM$. On veut définir un groupoïde de déformation

$$M \times M \times \mathbb{R} \sqcup G(H^\cdot) \times \{0\} \rightrightarrows M \times \mathbb{R}$$

on a vu que dans le cas $k = 1$ ce groupoïde était donné par $\text{DNC}_{H^1}(M \times M, M) \rightrightarrows M \times \mathbb{R}$. Son algèbroïde est alors donnée par \mathcal{A}_{H^1} avec

$$\Gamma(\mathcal{A}_{H^1}) = \{X \in \Gamma(TM \times \mathbb{R}), \partial_t X|_{t=0} \in \Gamma(H^1)\}$$

On veut itérer ce processus. Le groupoïde que l'on veut obtenir doit intégrer l'algèbroïde \mathcal{A}_H . (qui est le recollement naturel de l'algèbroïde TM et de $\text{Lie}(G(H^\cdot))$), le recollement d'algèbroïdes étant plus simple que celui des groupoïdes, voir Van-Erp, Yunken [37])

$$\Gamma(\mathcal{A}_{H^\cdot}) = \left\{ X \in \Gamma(TM \times \mathbb{R}), \partial_t^i X|_{t=0} \in \Gamma(H^i), \forall i \geq 0 \right\}$$

On raisonne par récurrence, supposons qu'au rang $k - 1$ on ait le groupoïde

$$\text{DNC}_{H^1, \dots, H^{k-1}}(M \times M, M) = M \times M \times \mathbb{R}^* \sqcup G(H^1, \dots, H^{k-1}) \times \{0\}$$

avec l'algèbroïde voulue et où $G(H^1, \dots, H^{k-1})$ désigne le groupe de lie nilpotent associé à la filtration tronquée $0 = H^0 \subset H^1 \subset \dots \subset H^{k-1} \subset TM$. La condition

$$\forall i, j, \left[\Gamma(H^i), \Gamma(H^j) \right] \subset \Gamma(H^{i+j})$$

assure que $H^1 \oplus H^2/H^1 \oplus \dots \oplus H^k/H^{k-1}$ est un sous-groupoïde de $G(H^1, \dots, H^{k-1})$ on peut ainsi regarder le groupoïde

$$\text{DNC} \left(\text{DNC}_{H^1, \dots, H^{k-1}}(M \times M, M), H^1 \oplus H^2/H^1 \oplus \dots \oplus H^k/H^{k-1} \times \{0\} \right) \rightrightarrows M \times \mathbb{R}^2$$

et son algèbroïde est donnée par

$$\text{DNC} \left(\mathcal{A}_{H^1, \dots, H^{k-1}}, H^1 \oplus H^2/H^1 \oplus \dots \oplus H^k/H^{k-1} \right)$$

dont l'espace des sections est

$$\left\{ X \in \Gamma(TM \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \partial_t^i X(0, u) \in \Gamma(H^i) \forall 0 \leq i \leq k-1, u \in \mathbb{R} \wedge \partial_t^k X(0, 0) \in \Gamma(H^k) \right\}$$

Définition 5.12. On définit $\text{DNC}_{H^1, \dots, H^k}(M \times M, M)$ (abrégé en $\text{DNC}_{H^\cdot}(M \times M, M)$ si il n'y a pas d'ambiguïté sur la fin de la filtration) comme la fibre au dessus de $M \times \{1\} \times \mathbb{R}$ de $\text{DNC} \left(\text{DNC}_{H^1, \dots, H^{k-1}}(M \times M, M), H^1 \oplus H^2/H^1 \oplus \dots \oplus H^k/H^{k-1} \times \{0\} \right)$

Théorème 5.13 (Mohsen). $\text{DNC}_{H^\cdot}(M \times M, M)$ est le groupoïde du calcul inhomogène voulu i.e.

$$\begin{aligned} \text{DNC}_{H^\cdot}(M \times M, M) &= M \times M \times \mathbb{R}^* \sqcup G(H^\cdot) \times \{0\} \\ \mathcal{A}(\text{DNC}_{H^\cdot}(M \times M, M)) &= \mathcal{A}_H \end{aligned}$$

On peut voir ce groupoïde autrement : on aurait pu vouloir itérer directement les déformations au cone normal, on aurait alors obtenu le groupoïde

$$\text{DNC}^{k+1} \left(M \times M, M, H^1 \times \{0\}, \dots, H^1 \oplus \dots \oplus H^k /_{H^{k-1}} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \right) \rightrightarrows M \times \mathbb{R}^{k+1}$$

On a vu en itérant les déformations au cone normal itérées que ce groupoïde est muni d'une action de $(\mathbb{R}^*)^{k+1}$, son action diagonale préserve la fibre au dessus de $M \times \{(1, \dots, 1, 0)\}$ et cette fibre est égale à $\text{DNC}_{H^\cdot}(M \times M, M)$ (l'action sur ce dernier devient alors l'inverse de l'action anisotrope déjà décrite).

Cette construction étant naturellement fonctorielle on en déduit les constructions suivantes :

Corollaire 5.14. *Si G est un groupoïde de Lie et $H^1 \subset \dots \subset H^k \subset \mathcal{A}G$ est une filtration de sous-fibrés telle que $[\Gamma(H^i), \Gamma(H^j)] \subset \Gamma(H^{i+j})$ alors on a un groupoïde de déformation*

$$\text{DNC}_{H^\cdot}(G, G^{(0)}) = G \times \mathbb{R}^* \sqcup G(H^\cdot) \times \{0\} \rightrightarrows G^{(0)} \times \mathbb{R}$$

Corollaire 5.15. *Si G est un groupoïde de Lie, G' un sous-groupoïde, $H^1 \subset \dots \subset H^k \subset \mathcal{N}_{G'}^G$ une filtration en \mathcal{VB} -sous-groupoïdes avec la condition $[\Gamma(H^i), \Gamma(H^j)] \subset \Gamma(H^{i+j})$ alors*

$$\text{DNC}_{H^\cdot}(G, G') \rightrightarrows \text{DNC}_{H^{(0),\cdot}}(G^{(0)}, G'^{(0)})$$

est un groupoïde de Lie.

Références

- [1] Rui Almeida and Pierre Molino. Suites d’atiyah et feuilletages transversalement complets. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 300 :13–15, 1985.
- [2] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators : I. *Annals of Mathematics*, 87(3) :484–530, 1968.
- [3] R. Beals and P. Greiner. *Calculus on Heisenberg Manifolds*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1988.
- [4] Ovidiu Calin and Der-Chen Chang. *Sub-Riemannian Geometry : General Theory and Examples*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2009.
- [5] Woocheol Choi and Raphaël Ponge. Privileged coordinates and nilpotent approximation for carnot manifolds, ii. carnot coordinates, 2017.
- [6] Woocheol Choi and Raphaël Ponge. Privileged coordinates and nilpotent approximation of carnot manifolds, i. general results. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 25(1) :109–157, Jun 2018.
- [7] Woocheol Choi and Raphaël Ponge. Tangent maps and tangent groupoid for carnot manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, 62 :136–183, Feb 2019.
- [8] A. Connes and S.K. Berberian. *Noncommutative Geometry*. Elsevier Science, 1994.
- [9] Alain Connes. A survey of foliations and operator algebras. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 38, 06 2010.
- [10] Alain Connes and G. Skandalis. The longitudinal index theorem for foliations. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 20, 01 1984.
- [11] Marius Crainic and Rui Loja Fernandes. Integrability of lie brackets. *Annals of Mathematics*, 157(2) :575–620, 2003.
- [12] Claire Debord and Jean-Marie Lescure. K-duality for pseudomanifolds with isolated singularities. *Journal of Functional Analysis*, 219 :109 – 133, 2005.
- [13] Claire Debord and Jean-Marie Lescure. Index theory and groupoids, 2008.
- [14] Claire Debord and Jean-Marie Lescure. k -duality for stratified pseudomanifolds. *Geom. Topol.*, 13(1) :49–86, 2009.
- [15] Claire Debord, Jean-Marie Lescure, and Victor Nistor. Groupoids and an index theorem for conical pseudo-manifolds. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2009(628) :1 – 35, 2009.
- [16] Claire Debord, Jean-Marie Lescure, and Frédéric Rochon. Pseudodifferential operators on manifolds with fibred corners, 2011.
- [17] Claire Debord and Georges Skandalis. Adiabatic groupoid, crossed product by \mathbb{R}_+^* and pseudodifferential calculus. *Advances in Mathematics*, 257 :66 – 91, 2014.
- [18] Claire Debord and Georges Skandalis. Blowup constructions for lie groupoids and a boutet de monvel type calculus, 2017.
- [19] Claire Debord and Georges Skandalis. Lie groupoids, pseudodifferential calculus and index theory, 2019.
- [20] G. B. Folland and E. M. Stein. Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the heisenberg group. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 27(4) :429–522, 1974.
- [21] Mikhael Gromov. *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, pages 79–323. Birkhäuser Basel, Basel, 1996.

- [22] Peter Hahn. Haar measure for measure groupoids. *Transactions of the American Mathematical Society*, 242 :1–33, 1978.
- [23] Lars Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119 :147–171, 1967.
- [24] Jean-Marie Lescure, Dominique Manchon, and Stéphane Vassout. About the convolution of distributions on groupoids. *Journal of Noncommutative Geometry*, 11(2) :757–789, 2017.
- [25] Jean-Marie Lescure and Stéphane Vassout. Fourier integral operators on Lie groupoids. *Advances in Mathematics*, 320 :391–450, November 2017.
- [26] Kirill C. H. Mackenzie. *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2005.
- [27] R. Melrose. *The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem*. Research Notes in Mathematics. CRC Press, 1993.
- [28] Ralf Meyer. Morita equivalence in algebra and geometry, 1997.
- [29] I. Moerdijk and J. Mrcun. *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2003.
- [30] Omar Mohsen. On the deformation groupoid of the inhomogeneous pseudo-differential calculus, 2018.
- [31] Bertrand Monthubert. Groupoids and pseudodifferential calculus on manifolds with corners. *Journal of Functional Analysis*, 199(1) :243 – 286, 2003.
- [32] Bertrand Monthubert and François Pierrot. Indice analytique et groupoïdes de lie. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 325(2) :193 – 198, 1997.
- [33] Victor Nistor, Alan Weinstein, and Xu Ping. Pseudodifferential operators on differential groupoids. *Pacific Journal of Mathematics*, 189(1) :117–152, May 1999.
- [34] Alan Paterson. *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, volume 170. Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] J. Renault. *A Groupoid Approach to C^* -Algebras*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.
- [36] Erik van Erp. The atiyah-singer index formula for subelliptic operators on contact manifolds. part i. *Annals of Mathematics*, 171(3) :1647–1681, 2010.
- [37] Erik van Erp and Robert Yuncken. On the tangent groupoid of a filtered manifold. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 49(6) :1000–1012, Oct 2017.